

Mecânica Analítica



REVISÃO

Prof. Nelson Luiz Reyes Marques

Dinâmica Lagrangiana

➤ Vínculos

São limitações às possíveis posições e velocidades das partículas de um sistema mecânico, restringindo *a priori* o seu movimento.

- É importante salientar que os *vínculos* são limitações *de ordem cinemática* impostas ao sistema mecânico.
- As restrições antecedem a dinâmica e precisam ser levadas em conta na formulação das equações de movimento do sistema.
- Restrições de natureza dinâmica – decorrentes, portanto das equações de movimento – *não são vínculos*.

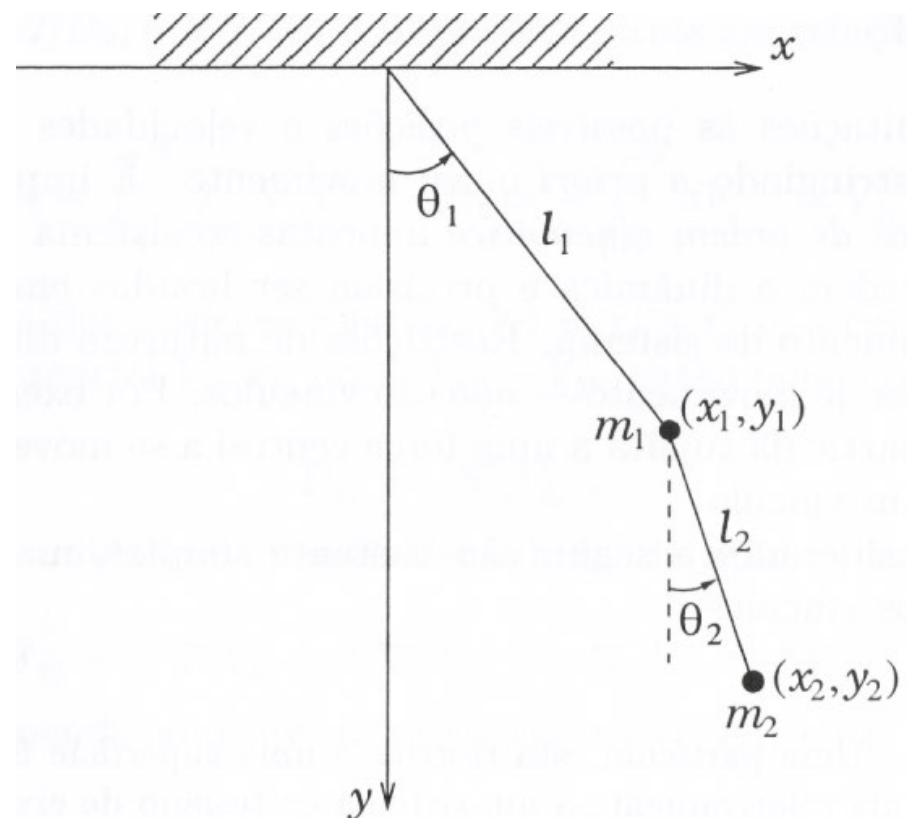
Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 1: Um pêndulo duplo oscila num plano vertical fixo. As equações de vínculo são

$$x^2 + y^2 - l_1^2 = 0, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = l_1^2$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2$$



Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 2: Escreva as equações de transformação o pêndulo duplo

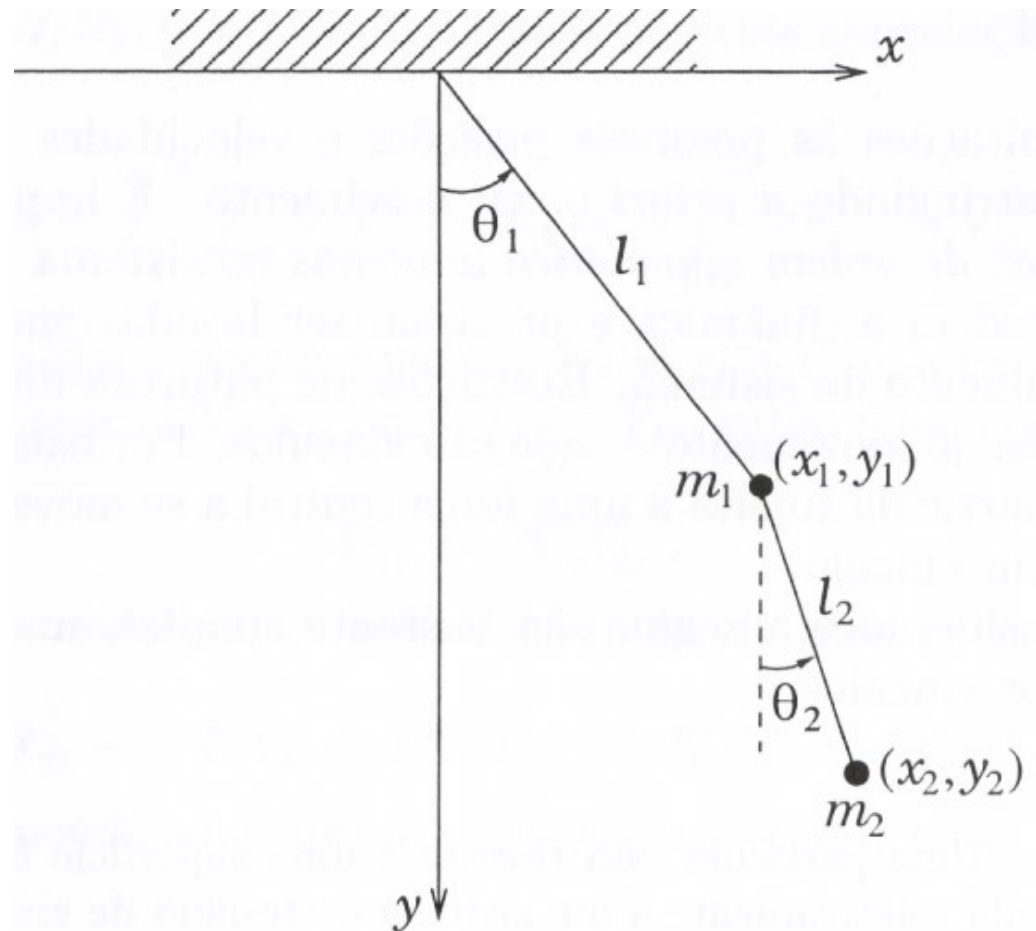
$$x_1 = l_1 \sin \theta_1$$

$$y_1 = l_1 \cos \theta_1$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2$$

$$y_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2$$

O sistema tem apenas 2 graus de liberdade com coordenadas generalizadas $q_1 = \theta_1$ e $q_2 = \theta_2$

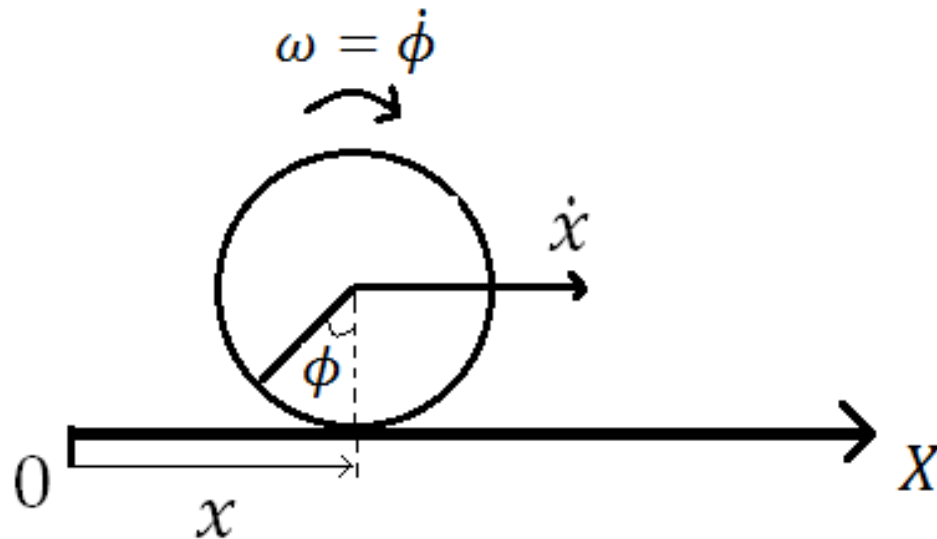


Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 3: Um cilindro rola sem deslizar ao longo de uma linha reta. Sendo x a posição do centro de massa do cilindro e ϕ o ângulo de rotação do centro de massa, a condição de rolar sem deslizar é representada por

$$\dot{x} = R\dot{\phi} \quad \rightarrow \quad \dot{x} - R\dot{\phi} = 0$$

onde R é o raio do cilindro.



Dinâmica Lagrangiana

A função de Lagrange ou, simplesmente, *lagrangiano* L por:

$$L = T - V$$

As equações de movimento do sistema podem ser escritas na forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{Equações de Lagrange}$$

onde $k = 1, \dots, n$.

Se o sistema não for conservativo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 4: Considere uma partícula numa região onde existe um certo potencial de interação.

Solução: A lagrangiana é dada por: $L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - V(\vec{r})$

Tomando as coordenadas generalizadas como coordenadas cartesianas, temos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{x}_i) = m\ddot{x}_i$$

O que faz com que a equação de Euler-Lagrange forneça:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

que é a segunda lei de Newton para forças conservativas.



Força

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 5: Obtenha a Lagrangiana para um projétil (livre da resistência do ar) em termos de suas coordenadas cartesianas (x, y, z) , com z medido verticalmente para cima. Determine as três equações de Lagrange.

Solução:

A energia cinética e a energia potencial:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad V = mgz$$

A lagrangiana fica:
$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

As equações de movimento:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

$$\mathbf{0} = m\ddot{x} \quad \mathbf{0} = m\ddot{y} \quad -mg = m\ddot{z} \quad \text{que corresponde a } F=mg.$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 6: Obtenha a Lagrangiana para uma partícula movendo-se em uma dimensão ao longo do eixo x sujeita à força $F = -kx$ (com k positivo). Determine a equação de Lagrange do movimento.

Solução:

A energia cinética e a energia potencial: $F = -kx \rightarrow V = \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

A lagrangiana fica: $L = T - V \rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$

As equações de movimento:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\boxed{-kx = m\ddot{x}}$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 7: Considere uma massa m movendo-se em duas dimensões com energia potencial $V(x, y) = -\frac{1}{2}kr^2$, onde $r^2 = x^2 + y^2$. Obtenha a lagrangeana, usando as coordenada x e y , e determine as equações de movimento de Lagrange.

Solução:

A energia cinética e a energia potencial: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \rightarrow V = -\frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$

A lagrangiana fica: $L = T - V \rightarrow L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$

As equações de movimento:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\boxed{-kx = m\ddot{x}}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\boxed{-ky = m\ddot{y}}$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 8: Considere uma massa m movendo-se em uma rampa, sem atrito, que tem uma declividade α com a horizontal. Obtenha a Lagrangiana em termos da coordenada x , medida horizontalmente através da rampa, e da coordenada y , medida para baixo da rampa. (Trate o sistema como bidimensional, mas inclua a energia potencial gravitacional). Determine as duas equações de Lagrange e justifique se elas são as mesmas que você esperava.

Solução:

A energia cinética e a energia potencial: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \rightarrow V = mgy = mgy \sin \alpha$

A lagrangiana fica: $L = T - V \rightarrow L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \sin \alpha$

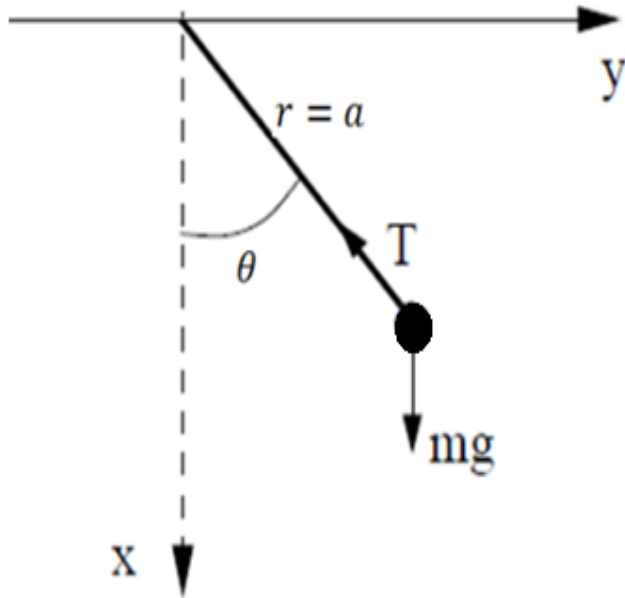
As equações de movimento:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \boxed{\rightarrow 0 = m\ddot{x}}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \boxed{\rightarrow mg \sin \alpha = m\ddot{y}}$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 9: Determine a Lagrangiana e a equação de movimento de um pêndulo simples em coordenadas polares de raio fixo $r=a$ e θ é a única coordenada livre.



Solução:

$$x = a \cos \theta \rightarrow y = a \sin \theta$$

$$\dot{x} = -a\dot{\theta} \sin \theta \rightarrow \dot{y} = a\dot{\theta} \cos \theta$$

A energia cinética e a energia potencial:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = -mgx = -mga \cos \theta$$

A lagrangiana fica:

$$L = T - V \rightarrow L = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 + mga \cos \theta$$

Dinâmica Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + mga \cos \theta$$

A equação de movimento:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (ma^2\dot{\theta}) + mga \sin \theta &= 0 \\ ma^2\ddot{\theta} &= -mga \sin \theta \end{aligned}$$

$$a\ddot{\theta} = -g \sin \theta$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 10: Deduza as equações de Lagrange, para uma partícula que se move em um campo conservativo bidimensional, em coordenadas

- a) cartesianas
- b) Polares
- c) cilíndricas

Dinâmica Lagrangiana

Solução: a)

A energia cinética e a energia potencial: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ $V = V(x, y)$

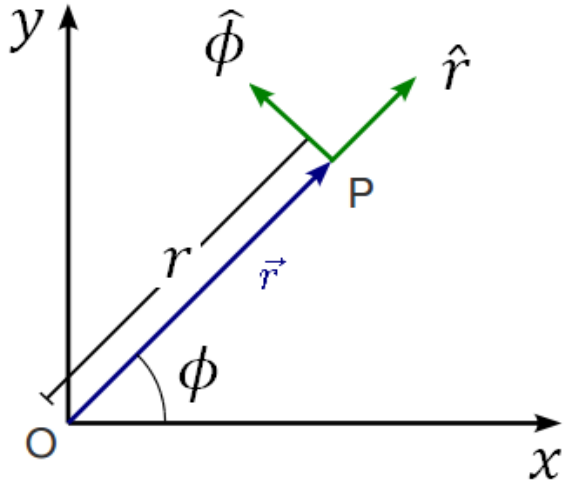
A lagrangiana fica: $L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x; y)$

As equações de movimento: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x &\quad \rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \rightarrow \quad F_x = m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = F_y &\quad \rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = -\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \rightarrow \quad F_y = m\ddot{y} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = F_y \end{aligned}} \right\} \vec{F} = m\vec{a}$$

Dinâmica Lagrangiana

Solução: b) A energia cinética e a energia potencial: $v_r = \dot{r} \rightarrow v_\phi = r\dot{\phi}$



$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) \quad V = V(r, \phi)$$

lagrangiana fica:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r, \phi)$$

A equações de movimento:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{r}) - \left[mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \right] = 0$$

$$m\ddot{r} = -mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}$$

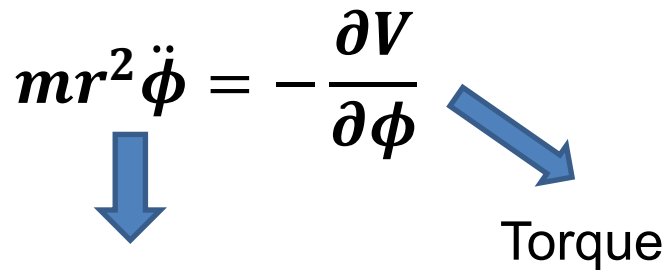
$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

Dinâmica Lagrangiana

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r, \phi)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) - \left(-\frac{\partial V}{\partial \phi}\right) = 0$$

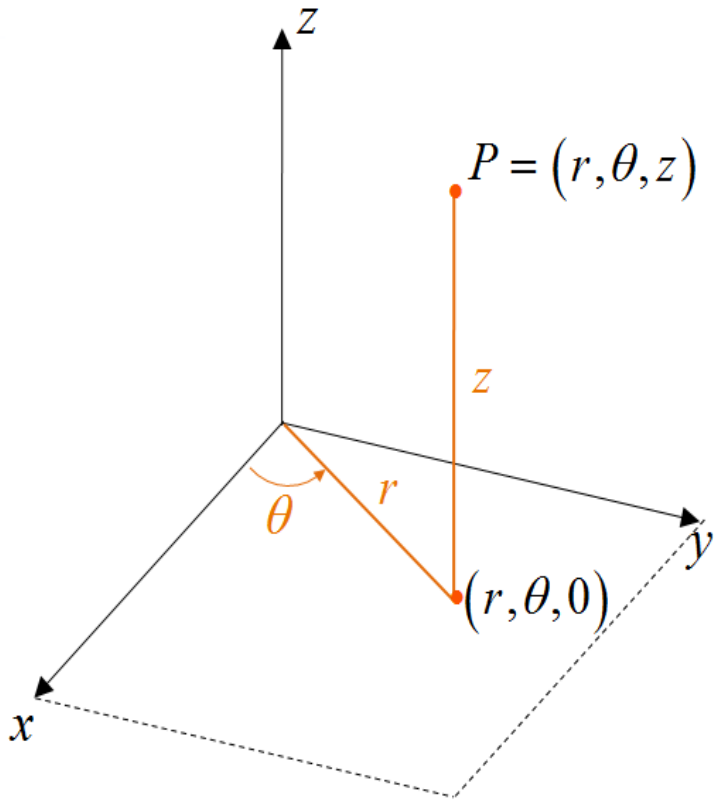
$$mr^2\ddot{\phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}$$


Momento angular

Torque

Dinâmica Lagrangiana

Solução: c) A energia cinética e a energia potencial:



$$v_r = \dot{r} \quad \rightarrow \quad v_\phi = r\dot{\theta} \quad \rightarrow \quad v_z = \dot{z}$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

$$V = V(r, \theta, z)$$

A lagrangiana fica:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - V(r, \theta, z)$$

Dinâmica Lagrangiana

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - V(r, \theta, z)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{r}) - (mr\dot{\theta}^2 \frac{\partial V}{\partial r}) = 0 \quad \rightarrow \quad m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \vec{F}_r$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

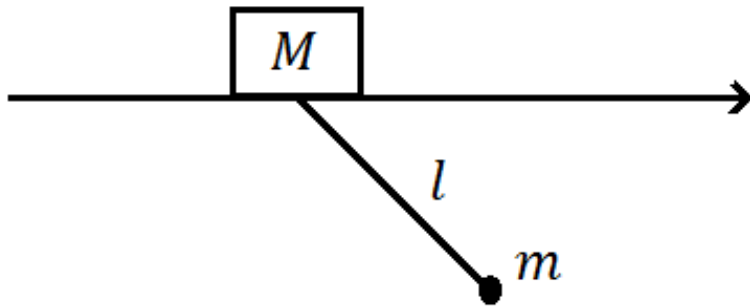
$$\frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad \rightarrow \quad m \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = -\frac{\partial V}{\partial \theta} \quad \text{Torque}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

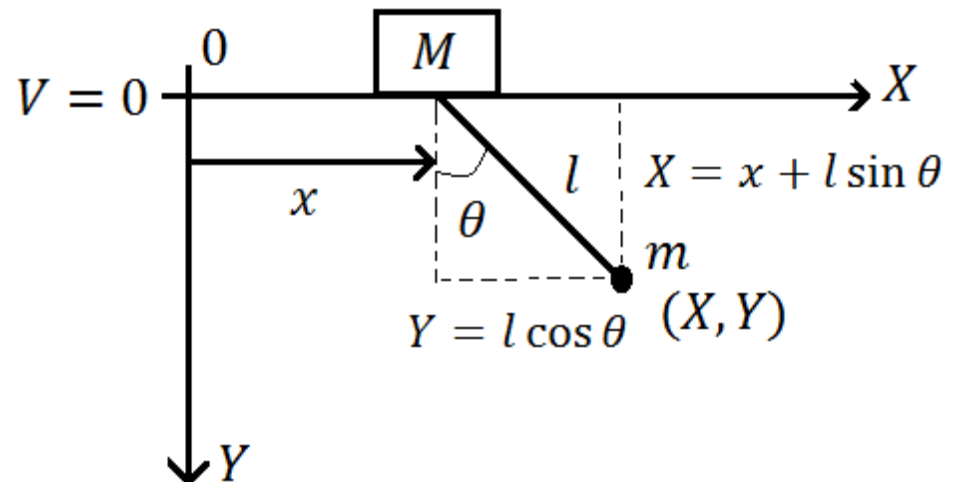
$$\frac{d}{dt} (m\dot{z}) + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad \vec{F}_z$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 11: Determine a equação de Lagrange e as equações de movimento para um pêndulo com suporte livre (a massa M pode se mover livremente sem atrito no plano horizontal, enquanto o pêndulo oscila no plano vertical).



Refazendo o desenho e tomando o nível de referencia na origem, temos



Dinâmica Lagrangiana

Podemos escrever as energias cinética e potencial

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) \quad V_M = 0 \quad e \quad V_m = -mgY, \quad \text{logo} \quad V = -mgY$$

$$\text{Como } \begin{cases} X = x + l \sin \theta & \rightarrow & \dot{X} = \dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta \\ Y = l \cos \theta & \rightarrow & \dot{Y} = -l\dot{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

$$\text{Logo } \begin{cases} \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

Podemos reescrever as energias cinética e potencial como

$$T = \frac{m + M}{2}\dot{x}^2 + \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta \quad V = -mgl \cos \theta$$

A lagrangiana fica

$$L = T - V = \frac{m + M}{2}\dot{x}^2 + \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + mgl \cos \theta$$

Dinâmica Lagrangiana

$$L = \frac{m + M}{2} \dot{x}^2 + \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + mgl \cos \theta$$

Podemos, agora, determinar as equações de movimento

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \frac{d}{dt} [(m + M)\dot{x} + ml\dot{\theta} \cos \theta] - 0 = 0$$

$$(m + M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = 0$$

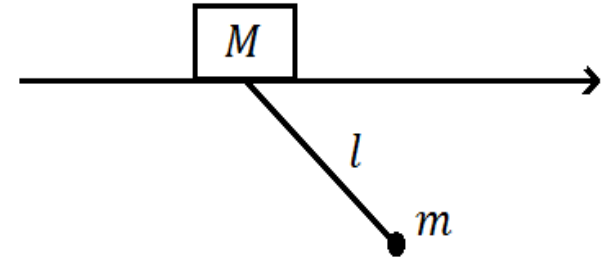
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{d}{dt} [ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x} \cos \theta] - [-ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta - mgl \sin \theta] = 0$$

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta - ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + mgl \sin \theta = 0$$

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta + mgl \sin \theta = 0$$

Dinâmica Lagrangiana

Como as equações de movimento são difíceis de resolver (equações não lineares – não existe um método geral de resolução, cada caso é um caso), vamos analisar alguns casos limites (particulares) afim de verificarmos se essas equações estão corretas.



1º) Se $m = 0$ \Rightarrow $(m + M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = 0$

$(0 + M)\ddot{x} = 0 \rightarrow \ddot{x} = 0 \rightarrow M$ se move como um corpo livre

2º) Se $M \rightarrow \infty$ \Rightarrow $(m + M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = 0$

Divide-se todos os termos por M $\frac{(m + M)\ddot{x}}{M} + \frac{ml\ddot{\theta} \cos \theta}{M} - \frac{ml\dot{\theta}^2 \sin \theta}{M} = 0 \rightarrow \ddot{x} = 0$

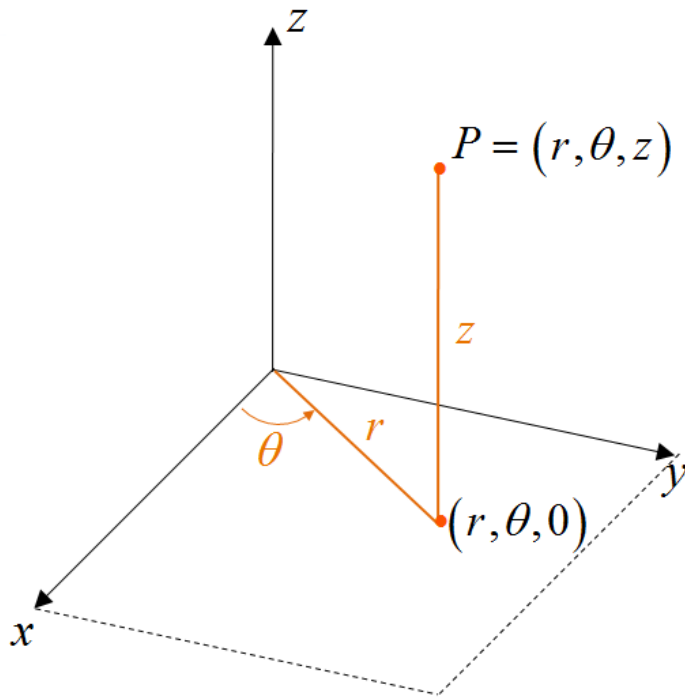
Substituindo $\ddot{x} = 0$ na segunda equação de movimento ($ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta + mgl \sin \theta = 0$) e dividindo por ml^2 , obtemos

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

que corresponde a equação do pêndulo simples com ponto de suspensão fixo.

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 12: Uma partícula de massa m move-se em um campo de força conservativo. Ache (a) a função lagrangiana, (b) as equações do movimento em coordenadas cilíndrica (r, θ, z) .



Solução: (a) A energia cinética total em coordenadas cilíndricas

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2]$$

A energia potencial $V = V(r, \theta, z)$. Então a função lagrangiana é

$$L = T - V = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2] - V(r, \theta, z)$$

(b) As equações de Lagrange são

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{r}) - \left(mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

Dinâmica Lagrangiana

(b) As equações de Lagrange são

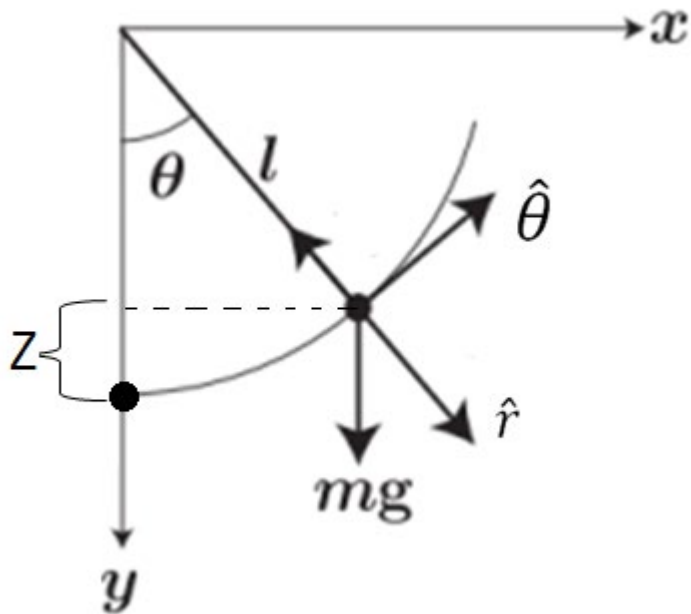
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{r}) - \left(mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \rightarrow m \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = -\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{z}) + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \rightarrow m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 13: Considere um pêndulo plano formado por uma haste inextensível de comprimento l e massa desprezível tendo na sua extremidade uma partícula pontual de massa m . Escreva as equações de movimento da partícula em coordenadas polares r e θ .



Solução:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = mgz = mgr(1 - \cos \theta)$$

A lagrangiana fica:

$$L = T - V \rightarrow L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - mgr(1 - \cos \theta)$$

Dinâmica Lagrangiana

$$L = T - V \rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mgr(1 - \cos \theta)$$

As equações de movimento são: :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{r}) - [mr\dot{\theta}^2 - mg(1 - \cos \theta)] = 0$$

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - mg(1 - \cos \theta)$$

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - g(1 - \cos \theta)$$

Dinâmica Lagrangiana

$$L = T - V \rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mgr(1 - \cos \theta)$$

As equações de movimento são:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) - mgr \sin \theta = 0$$

temos: $mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = mgr \sin \theta$

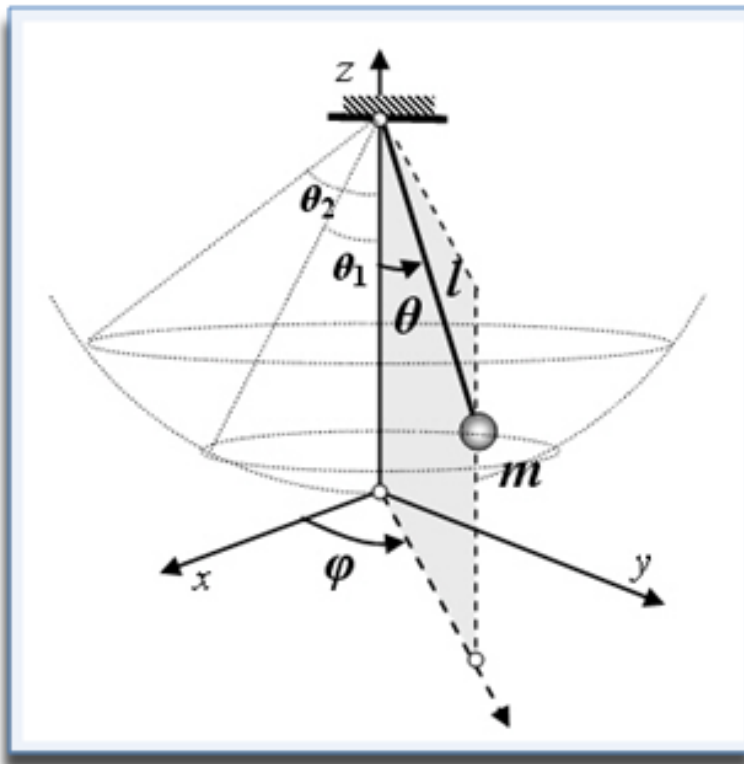
Como, $r = l$ e $\dot{r} = 0$:

$$l\ddot{\theta} = mg \sin \theta \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{g}{l} \sin \theta$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 14: Obtenha as equações de Lagrange para o movimento de um pêndulo esférico, ou seja, uma massa puntiforme suspensa por uma barra de massa desprezível.

SOLUÇÃO:



Podemos pensar inicialmente que o pêndulo esférico tem 3 coordenadas independentes, que são as cartesianas x , y e z . No entanto, o comprimento da barra é constante, o que implica na seguinte equação de vínculo holonômico:

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

Dinâmica Lagrangiana

Dessa forma, o número de coordenadas generalizadas será apenas 2. a saber θ e φ , como mostra a figura.

Assim, temos as seguintes equações de transformação de coordenadas:

$$x = l \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = l \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = l - l \cos \theta$$

Fazendo as derivadas temporais, temos:

$$\dot{x} = l \cos \theta \dot{\theta} \cos \varphi + l \sin \theta (-\sin \varphi) \dot{\varphi}$$

$$\dot{y} = l \cos \theta \dot{\theta} \sin \varphi + l \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi}$$

$$\dot{z} = l \sin \theta \dot{\theta}$$

Dinâmica Lagrangiana

Então, a energia cinética é calculada da seguinte maneira:

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\therefore T = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$$

Já a energia potencial é calculada da seguinte maneira:

$$\therefore V = mg(l - l \cos \theta)$$

Assim, temos a seguinte função Lagrangiana:

$$\therefore L = L(\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}) = T - V = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mg(l - l \cos \theta)$$

Dinâmica Lagrangiana

Para obtermos as equações de Lagrange, utilizamos a fórmula abaixo, para cada coordenada generalizada q_j , onde $j=1,2$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (1)$$

Para $j = 1$, temos $q_1 = \theta$ e:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} \text{ e } \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{m}{2} l^2 \sin 2\theta \dot{\theta} - mgl \sin \theta \quad (2)$$

De (1) e (2), temos:

$$\frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\theta}) - \left(\frac{m}{2} l^2 \sin 2\theta \dot{\theta} - mgl \sin \theta \right) = 0$$

$$\therefore \ddot{\theta} = \left(\frac{\sin 2\theta \dot{\theta}}{2} - \frac{g}{l} \sin \theta \right)$$

Dinâmica Lagrangiana

Para $j = 2$, temos $q_2 = \varphi$ e:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \text{ e } \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (3)$$

De (1) e (3), temos:

$$\frac{d}{dt} (ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) - 0 = 0$$

$$ml^2 \sin 2\theta \dot{\theta} \dot{\varphi} + ml^2 \sin^2 \theta \ddot{\varphi} = 0$$

$$\therefore \ddot{\varphi} + \frac{\sin 2\theta}{\sin^2 \theta} \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0$$

Dinâmica Lagrangiana

Assim, as equações de Lagrange são:

$$\therefore \ddot{\theta} = \left(\frac{\sin 2\theta \dot{\theta}}{2} - \frac{g}{l} \sin \theta \right)$$

$$\therefore \ddot{\varphi} + \frac{\sin 2\theta}{\sin^2 \theta} \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0$$

Momentos generalizados (canônicos)

Estas equações podem ser chamadas de equação de movimento de Lagrange

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Equações de Hamilton

O hamiltoniano $H(q, p, t)$ definida por:
$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)$$

Se um sistema for conservativo, o hamiltoniano H pode ser interpretado como a energia total (cinética e potencial) do sistema. $H = T + V$

Equações de movimento de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Dinâmica Hamiltoniana

Exemplo 15: A lagrangiana de um oscilador harmônico é dada por

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}, \text{ determine:}$$

a) o momento conjugado

$$p_x = m\dot{x} \quad \rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

b) A hamiltoniana

$$H = \dot{x}p_x - L = \frac{p_x^2}{m} - \frac{m}{2} \left(\frac{p_x}{m} \right)^2 + \frac{kx^2}{2}$$

Dinâmica Hamiltoniana

Exemplo 16: A partícula livre em coordenadas esféricas. O vetor velocidade é dado por $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$, determine:

a) a lagrangiana

$$L = T + V = T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta)$$

b) Os momentos conjugados

$$\begin{cases} p_r = m\dot{r} \\ p_\theta = mr^2\dot{\theta} \\ p_\phi = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \\ \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{(mr^2\sin^2\theta)} \end{cases}$$

Dinâmica Hamiltoniana

c) a hamiltoniana

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)$$

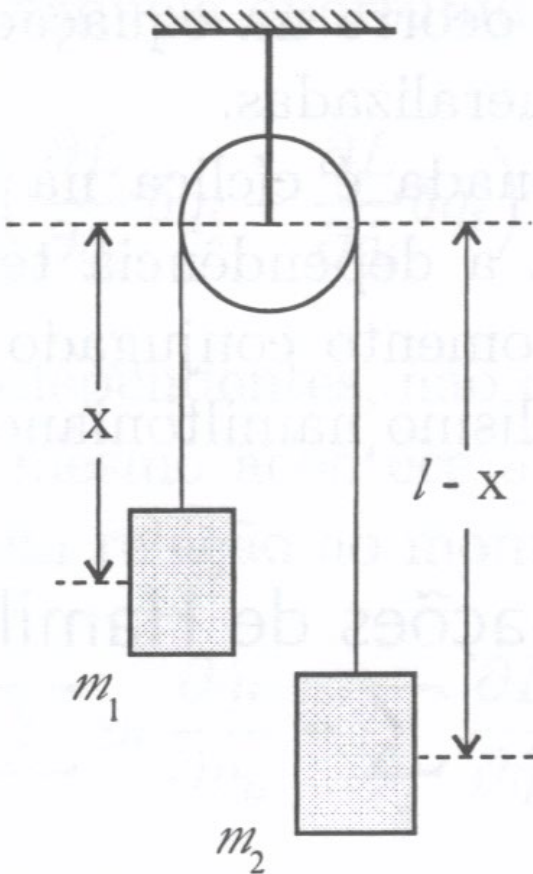
$$H = \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\phi}p_\phi - L$$

$$H = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} + \frac{p_\phi^2}{mr^2 \sin^2 \theta} - \frac{m}{2} \left(\frac{p_r}{m} \right)^2 - \frac{mr^2}{2} \left(\frac{p_\theta}{mr^2} \right)^2 - \frac{mr^2 \sin^2 \theta}{2} \left(\frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2 \theta} \right)^2$$

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right)$$

Dinâmica Hamiltoniana

Exemplo 17: Máquina de Atwood



Pelos dados da figura, temos

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 \quad V = -m_1 g x - m_2 g (l - x)$$

Desprezando o termo constante, temos

$$V = -m_1 g x + m_2 g x = (-m_1 + m_2) g x$$

A expressão do lagrangiano fica

$$L = T - V \quad L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + (m_1 - m_2) g x$$

A expressão do hamiltoniano é dada por

$$H = \dot{q}_i p_i - L = p \dot{x} - L$$

$$H = p \dot{x} - L = p \dot{x} - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + (m_1 - m_2) g x$$

Dinâmica Hamiltoniana

$$H = p\dot{x} - L = p\dot{x} - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2)gx$$

O hamiltoniano deve ser escrito apenas em termos de coordenadas e momentos, eliminando as velocidades.

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x}$$

Substituindo a equação

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x}$$

no hamiltoniano

$$H = p\dot{x} - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2)gx$$

obtemos

$$H = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} + (m_1 - m_2)gx$$

Dinâmica Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} + (m_1 - m_2)gx$$

Calculando as equações de Hamilton $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \rightarrow \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m_1 + m_2}$

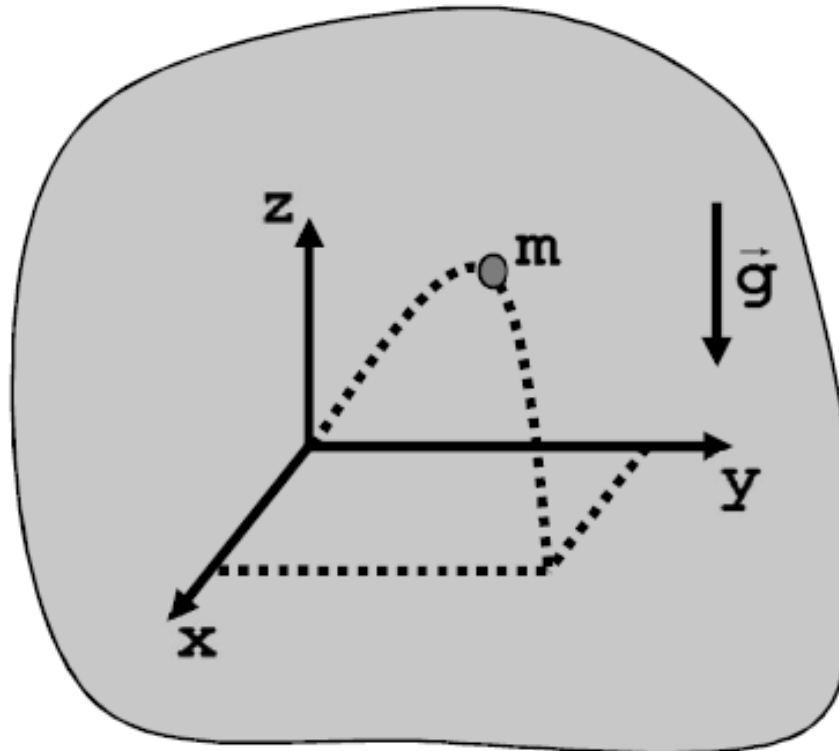
$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \rightarrow \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = (m_1 - m_2)g$$

Combinando as duas expressões, obtemos a expressão para a aceleração com que as massas se deslocam

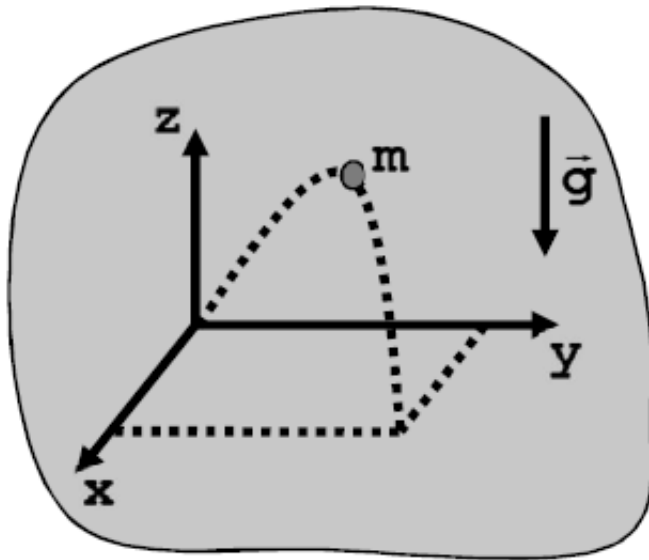
$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

Dinâmica Hamiltoniana

Exemplo18: Encontre a Hamiltoniana e as equações canônicas de Hamilton para um movimento em três dimensões de uma partícula em um campo gravitacional uniforme sem resistência do ar.



Dinâmica Hamiltoniana



Hamiltoniana

$$H = T + V$$

Equações canônicas

$$p'_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$q'_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Coordenadas generalizadas $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$

Energia Cinética :

$$T = \frac{1}{2} m (\mathbf{x}'^2 + \mathbf{y}'^2 + \mathbf{z}'^2)$$

Energia Potencial : $V = m g z$

Lagrangean : $L = T - V$

$$L = \frac{1}{2} m (\mathbf{x}'^2 + \mathbf{y}'^2 + \mathbf{z}'^2) - m g z$$

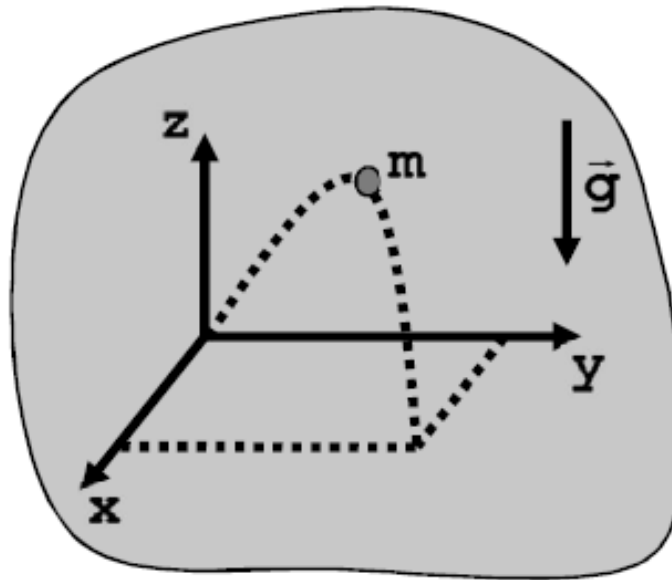
Cálculo dos momentos generalizados :

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}'} = m \mathbf{x}'$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}'} = m \mathbf{y}'$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{z}'} = m \mathbf{z}'$$

Dinâmica Hamiltoniana



Hamiltoniana

$$H = T + V$$

Equações canônicas

$$p'_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$q'_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Momentos generalizados :

$$p_x = m x' \rightarrow x' = p_x / m$$

$$p_y = m y' \rightarrow y' = p_y / m$$

$$p_z = m z' \rightarrow z' = p_z / m$$

Hamiltoniana : $H = T + V$

$$H = \frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2) + m g z$$

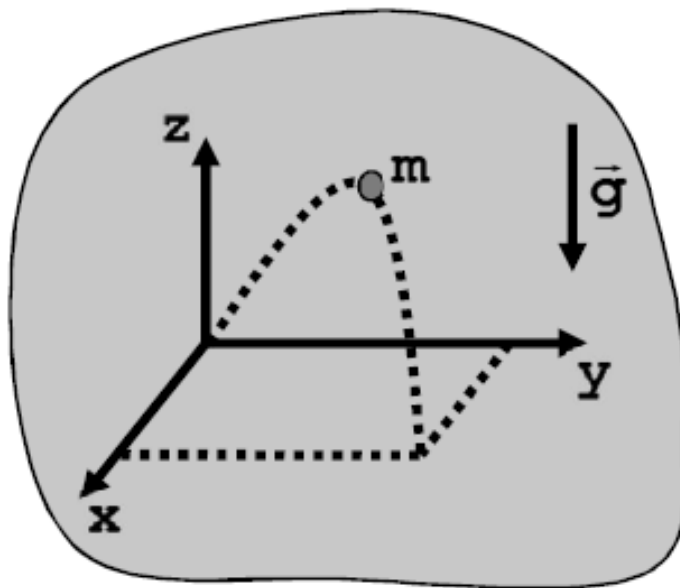
$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + m g z$$

Equações canônicas para x :

$$x' = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \rightarrow p'_x = m x''$$

$$p'_x = \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \rightarrow m x'' = 0$$

Dinâmica Hamiltoniana



Hamiltoniana

$$H = T + V$$

Equações canônicas

$$p'_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$q'_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Hamiltoniana : $H = T + V$

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz$$

Equações canônicas para x:

$$x' = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \rightarrow p'_x = m x''$$

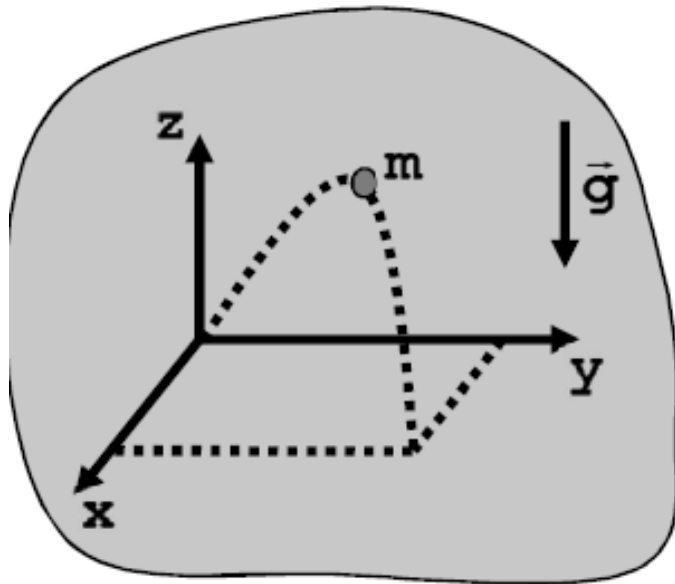
$$p'_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \rightarrow m x'' = 0$$

Equações canônicas para y:

$$y' = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \rightarrow p'_y = m y''$$

$$p'_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \rightarrow m y'' = 0$$

Dinâmica Hamiltoniana



Hamiltoniana

$$H = T + V$$

Equações canônicas

$$p'_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$q'_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Hamiltoniana : $H = T + V$

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + m g z$$

Equações canônicas para z :

$$z' = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \rightarrow p'_z = m z''$$

$$p'_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -m g$$

$$m z'' = -m g$$

$$z'' = -g$$