

Mecânica Analítica



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL-RIO-GRANDENSE

Campus CAVG

Dinâmica Lagrangiana

Licenciatura em Física

Prof. Nelson Luiz Reyes Marques

Dinâmica Lagrangiana

- O formalismo desenvolvido por **Newton** se caracteriza por lidar com grandezas vetoriais (Mecânica Vetorial).
- A Mecânica Analítica trata com grandezas escalares (coordenadas e energias), categoria em que se encaixam as teorias desenvolvidas por Lagrange e Hamilton).
- Na introdução de seu livro *Méchanique Analytique*, publicado em 1788, **Lagrange** alertava:” Nenhum diagrama será visto neste trabalho”. Quer dizer, é possível resolver todos os problemas acerca do movimento, como aqueles em que usamos a teoria de Newton, sem faz a menor menção a forças ou vetores.

Dinâmica Lagrangiana

➤ Vínculos

São limitações às possíveis posições e velocidades das partículas de um sistema mecânico, restringindo *a priori* o seu movimento.

- É importante salientar que os *vínculos* são limitações *de ordem cinemática* impostas ao sistema mecânico.
- As restrições antecedem a dinâmica e precisam ser levadas em conta na formulação das equações de movimento do sistema.
- Restrições de natureza dinâmica – decorrentes, portanto das equações de movimento – *não são vínculos*.

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 1:

A segunda lei de Newton obriga uma partícula sujeita a uma força central a se mover num plano fixo, mas isso não caracteriza um vínculo, pois é de natureza dinâmica.

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 2:

Uma partícula está restrita a uma superfície fixa. Seja $\vec{r} = (x, y, z)$ o vetor posição da partícula relativa a um sistema cartesiano de eixos em relação ao qual a superfície permanece fixa. Então x, y, z não são variáveis independentes mas devem satisfazer

$$f(\vec{r}) \equiv f(x, y, z) = 0$$

onde $f(\vec{r}) = 0$ é a equação da superfície. Se, por exemplo, a superfície for uma esfera centrada na origem,

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$

onde R é o raio da esfera.

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 3:

Uma partícula está restrita a uma superfície móvel e deformável. Neste caso x, y, z obedecem à equação

$$f(\vec{r}, t) \equiv f(x, y, z, t) = 0$$

a dependência temporal explícita indica a mudança na forma ou localização da superfície no transcurso do tempo.

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 4:

Duas partículas movem-se no espaço sempre unidas por uma haste rígida. O vínculo tem a forma

$$(r_2 - r_1)^2 - l^2 = 0$$

ou, equivalente,

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0$$

sendo l o comprimento invariável da haste.

Dinâmica Lagrangiana

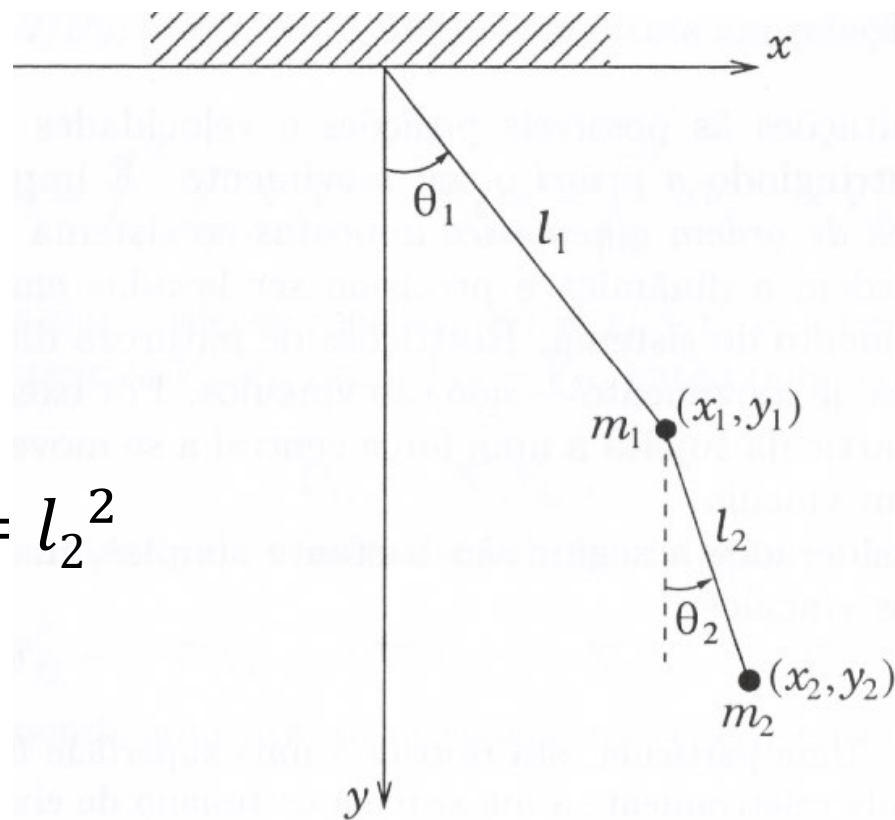
Exemplo 5:

Um pêndulo duplo oscila num plano vertical fixo. As equações de vínculo são

$$x^2 + y^2 - l_1^2 = 0, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = l_1^2$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2$$



Dinâmica Lagrangiana

➤ Coordenadas Generalizadas

Considere uma partícula ou sistema de partículas em movimento, sujeita a possíveis restrições (vínculos). Haverá um número mínimo de coordenadas independentes necessárias para especificar o movimento.

Essas coordenadas representadas por

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

são *chamadas coordenadas* generalizadas e podem ser distâncias, ângulos ou valores relacionados a eles.

Dinâmica Lagrangiana

➤ Notação:

O subscrito α variará de 1 a n , o número de graus de liberdade, enquanto o subscrito ν variará de 1 a N , o número de partículas do sistema.

- Considere o vetor posição da ν -partícula em relação ao sistema de coordenadas xyz como

$$\vec{r}_\nu = x_\nu \vec{i} + y_\nu \vec{j} + z_\nu \vec{k}$$

A relação entre as coordenadas generalizadas e as coordenadas de posição são dadas pelas *equações de transformação*,

Dinâmica Lagrangiana

$$x_v = x_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

$$y_v = y_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

$$z_v = z_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

Na forma vetorial, podemos escrever

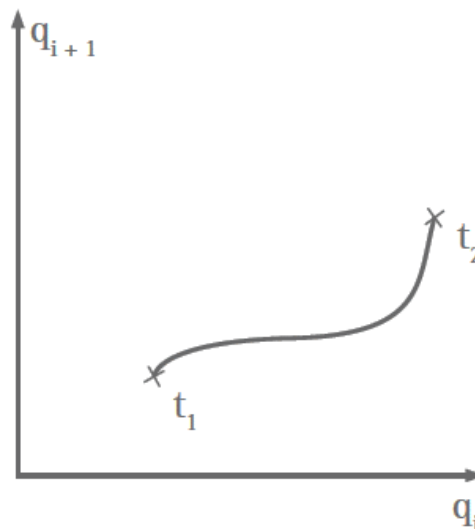
$$\vec{r}_v = \vec{r}_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

Essas funções são consideradas como sendo contínuas e tendo derivadas contínuas.

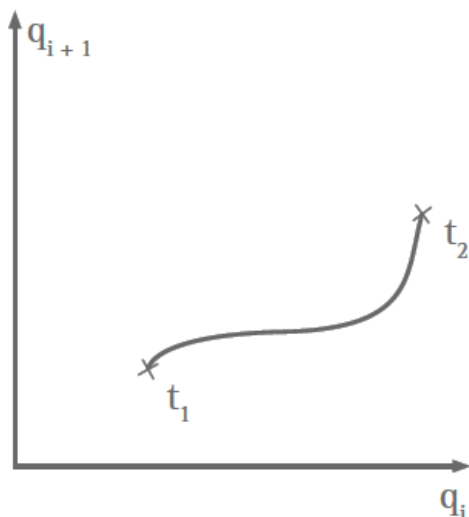
Dinâmica Lagrangiana

➤ Espaço de Configuração

- Como as coordenadas generalizadas são independentes entre si, em princípio, é possível imaginar um conjunto de eixos mutuamente perpendiculares definindo um espaço de n dimensões, em que cada ponto representa uma possibilidade, uma configuração, em que o sistema pode se encontrar.
- A evolução temporal do sistema é representada por uma curva $q(t)$ neste espaço.



Dinâmica Lagrangiana



A figura mostra a representação bidimensional dessa curva no espaço de configuração (a representação cartesiana é apenas simbólica, pois no caso geral tal estrutura não é garantida; por exemplo, a coordenada pode ser um ângulo) entre os instantes t_1 e t_2 . Neste contexto, chamaremos de velocidade generalizada a derivada temporal da coordenada generalizada:

- **Velocidade Generalizada:** chamaremos de velocidade generalizada a derivada temporal da coordenada generalizada:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t}$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 6:

Escreva as equações de transformação o pêndulo duplo

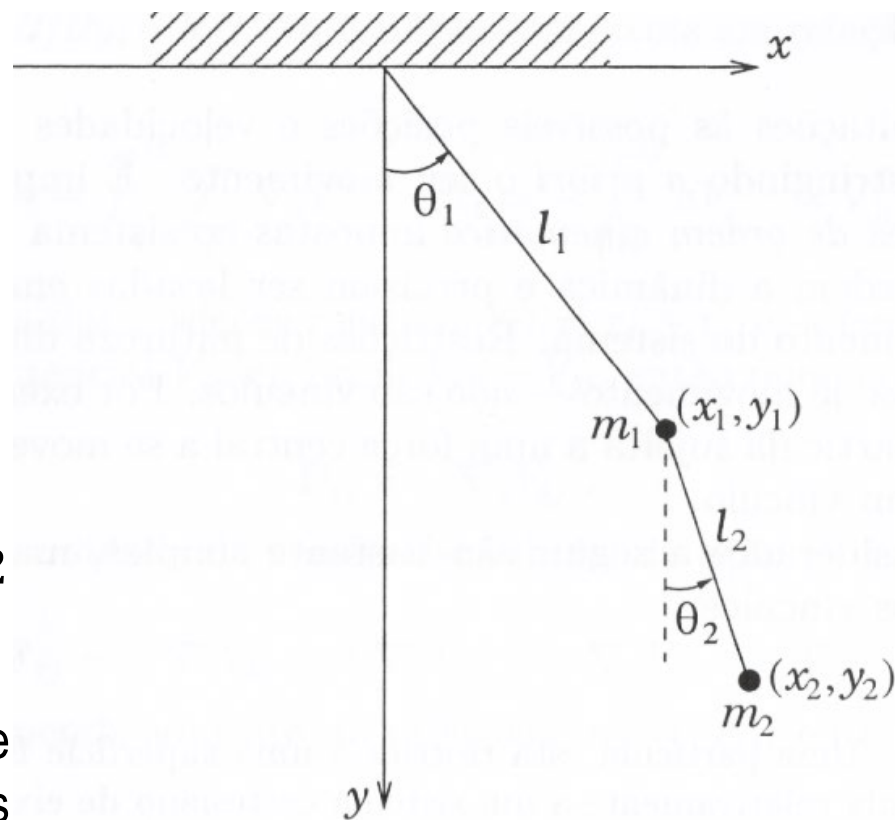
$$x_1 = l_1 \sin \theta_1$$

$$y_1 = l_1 \cos \theta_1$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2$$

$$y_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2$$

O sistema tem apenas 2 grau de liberdade com coordenadas generalizadas $q_1 = \theta_1$ e $q_2 = \theta_2$



Dinâmica Lagrangeana

➤ Vínculos Holônomos

Sejam as coordenadas de um sistema representadas por $q_1, q_2, \dots, q_n$ e o tempo representado por t . Se todas as restrições do sistema podem ser representadas por equações da forma $\phi(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$ ou sua equivalente, então o sistema é dito **holonômico**.

- Envolve o tempo de modo explícito.

➤ Vínculos Não-Holônomos

São aqueles que não podem ser expressos dessa forma. Exemplo: as paredes de um recipiente esférico de raio a onde encontram-se confinadas as moléculas de um gás. Nesse caso os vínculos são $r_i < a$

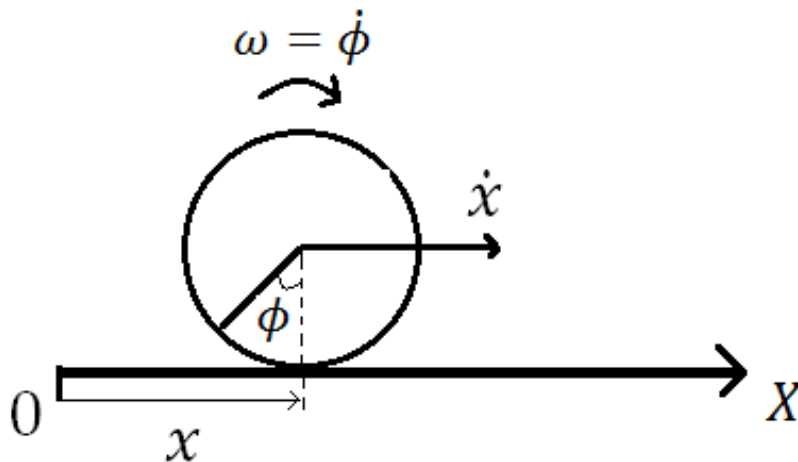
Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 7:

Um cilindro rola sem deslizar ao longo de uma linha reta. Sendo x a posição do centro de massa do cilindro e ϕ o ângulo de rotação do centro de massa, a condição de rolar sem deslizar é representada por

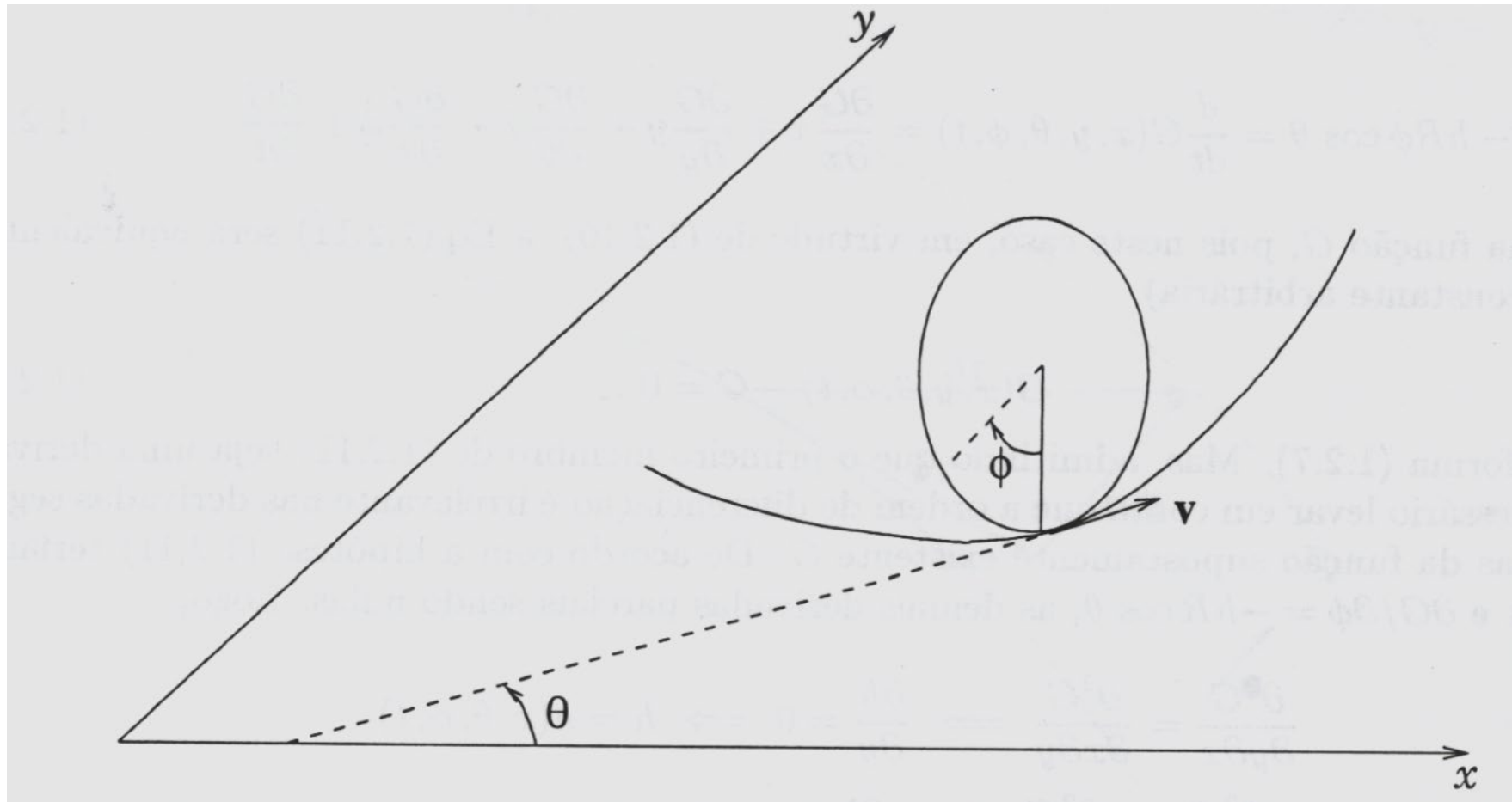
$$\dot{x} = R\dot{\phi} \quad \rightarrow \quad \dot{x} - R\dot{\phi} = 0$$

onde R é o raio do cilindro.



Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 8:



Exemplo 8:

Um disco vertical (moeda) rola sem deslizar num plano horizontal. Sejam (x, y) a posição do centro de massa do disco, θ o ângulo do plano do disco com o eixo x e ϕ o de rotação do disco em torno do seu eixo de simetria. Sendo $\vec{v}$ a velocidade do centro de massa, o disco rola sem deslizar desde que $\vec{v} = R\dot{\phi}$.

Sabendo que $\dot{x} \equiv v_x = v \cdot \cos \theta$ e $\dot{y} \equiv v_y = v \cdot \sin \theta$, somos conduzidos às equações

$$\dot{x} - R\dot{\phi} \cos \theta = 0 \quad e \quad \dot{y} - R\dot{\phi} \sin \theta = 0$$

que exprimem matematicamente a condição de rolamento sem deslizar.

Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

➤ Princípio de D'Alembert

O princípio de D'Alembert, ou princípio do trabalho virtual, usa a noção de coordenadas generalizadas e o conceito dos deslocamentos virtuais para eliminar as forças de vínculo da descrição do problema.

- Sem aparecerem explicitamente nas equações (**forças de vínculo**), mantém 'automaticamente' as restrições ao movimento, reduzindo de maneira natural o número de graus de liberdade considerados na descrição do sistema.

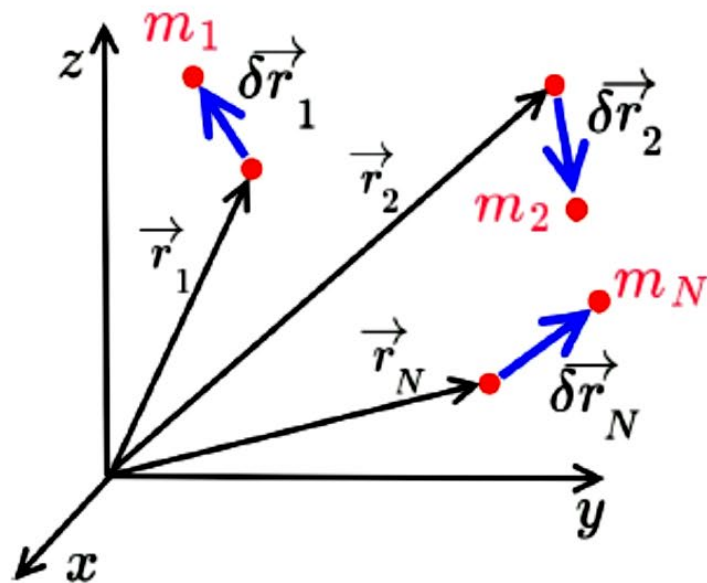
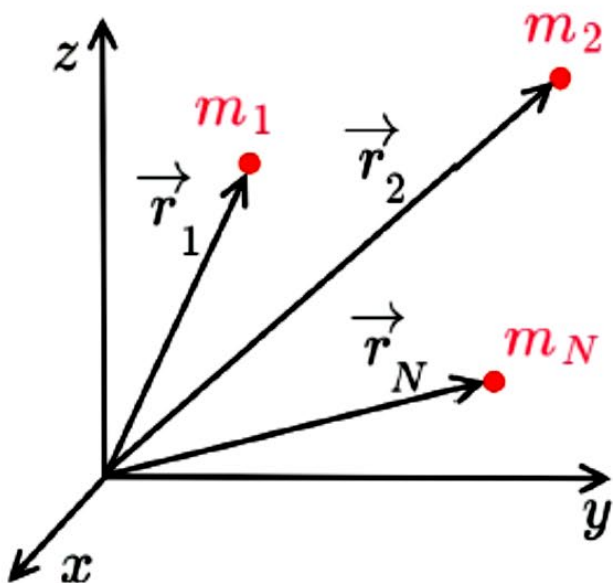
Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

➤ Deslocamentos Virtuais

- A formulação lagrangiana da mecânica parte do princípio de D'Alembert de trabalhos virtuais nulos.
- Sua ideia consiste em considerar como variações 'virtuais' $\delta \vec{r}_i$ nas posições das partículas, i.e. variações hipotéticas na configuração instantânea do sistema, alterariam quantidades relacionadas a sua energia.
- Em certo sentido, queremos determinar como o sistema se comporta nas 'vizinhanças' de sua configuração instantânea para entender qual das rotas possíveis a natureza escolhe na evolução temporal.

Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

- **Esquerda:** A mecânica newtoniana descreve um sistema mecânico através do conjunto de posições $\{\vec{r}_i(t)\}$ de todas as suas partículas.
- **Direita:** O princípio de D'Alembert considera como o sistema mecânico responde a uma mudança 'virtual' (i.e. hipotética) de configuração representada pelo conjunto de vetores infinitesimais $\{\delta\vec{r}_i(t)\}$.



Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

- São deslocamentos infinitesimais de cada partícula que levam a uma configuração possível a outra configuração possível infinitesimalmente próxima no **mesmo instante t** .
- Dado um sistema de N partículas os deslocamentos virtuais $\delta \vec{r}_i, i = 1, \dots, N$, são deslocamentos infinitesimais das posições $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ realizados instantaneamente e com a propriedade de serem compatíveis com os vínculos
- **Deslocamentos Virtuais**: em suma, as características definidoras dos deslocamentos virtuais são:
 - i. eles são infinitesimais;
 - ii. ocorrem num instante t fixo;
 - iii. não violam os vínculos.

Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

➤ Trabalho Virtual

Nesse formalismo, a distinção entre forças de vínculo e outras forças, que chamaremos de forças aplicadas, é fundamental. Seja então

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i$$

a força total atuando na i -ésima partícula do sistema, onde $\vec{f}_i$ são as forças de vínculo e $\vec{F}_i^{(a)}$ são as forças aplicadas, que podem ser externas ou devido às outras partículas do sistema.

Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

Veremos inicialmente como fazer isso no caso **estático**, isto é, um sistema de partículas em equilíbrio. Neste caso $\vec{F}_i = 0$ e, quaisquer que sejam os deslocamentos virtuais $\delta\vec{r}_i$,

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

como

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i$$

resulta

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

Levando em conta que o trabalho virtual das forças de vínculo é zero, somos conduzidos ao chamado ***princípio dos trabalhos virtuais***:

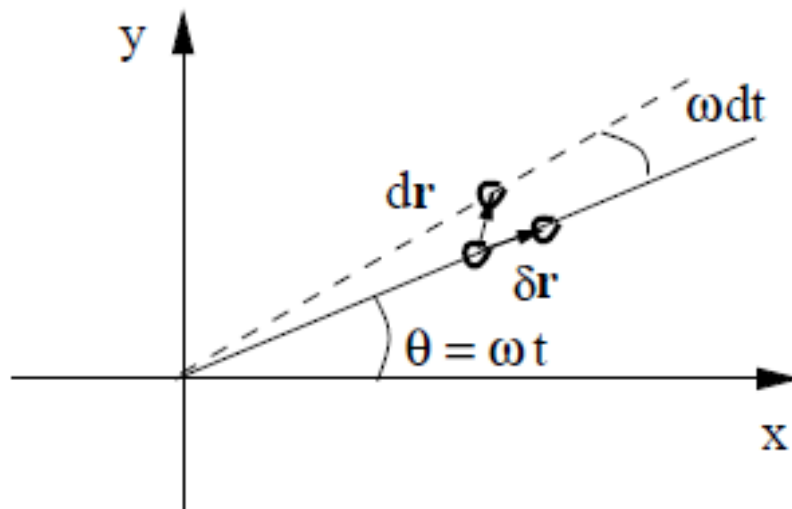
$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Este princípio permite exprimir a condição de equilíbrio para sistemas vinculados em termos somente das forças aplicadas.

Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

Exemplo 9:

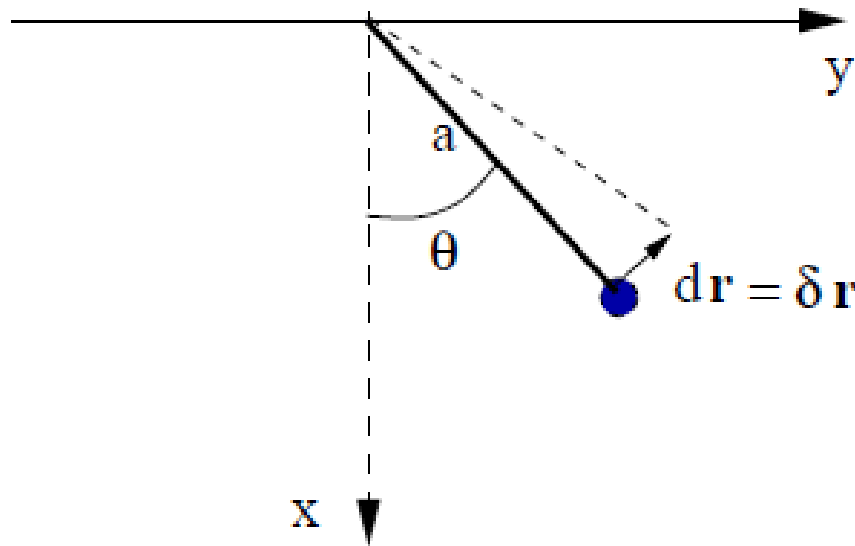
Considere a barra girando horizontalmente com velocidade angular ω e na qual uma conta pode deslizar sem atrito, conforme a figura. O deslocamento virtual da partícula ocorre com o tempo congelado e é feito ao longo da barra com esta parada. O deslocamento real da conta, por outro lado, leva a rotação da barra. Note que a força de vínculo em cada instante é sempre perpendicular à barra e $\delta \vec{r} \cdot \vec{f} = 0$.



Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

Exemplo 10:

No caso do pêndulo simples o deslocamento virtual coincide com o real e está na direção $\hat{\theta}$, perpendicular à tensão no fio.



Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

Estamos interessados na dinâmica, que pode ser formalmente reduzida à estática escrevendo a segunda lei de Newton na forma $\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0$, com $\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i$. Segundo a interpretação de d'Alembert. Cada partícula do sistema encontra-se em “equilíbrio” sob uma força resultante que é a soma da força real com uma “força efetiva invertida” igual a $-\dot{\vec{p}}_i$. Esta força adicional fictícia é uma força de inércia existente no referencial que acompanha o movimento da partícula, isto é, no qual ela permanece em repouso. Podemos escrever:

$$\sum_i (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

é verdadeira para qualquer deslocamento virtual $\delta \vec{r}_i$.

Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

Usando a equação $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i$ e admitindo a nulidade do trabalho virtual das forças de vínculo, resulta o chamado **princípio de d'Alembert**:

$$\sum_i (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i^{(a)}) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

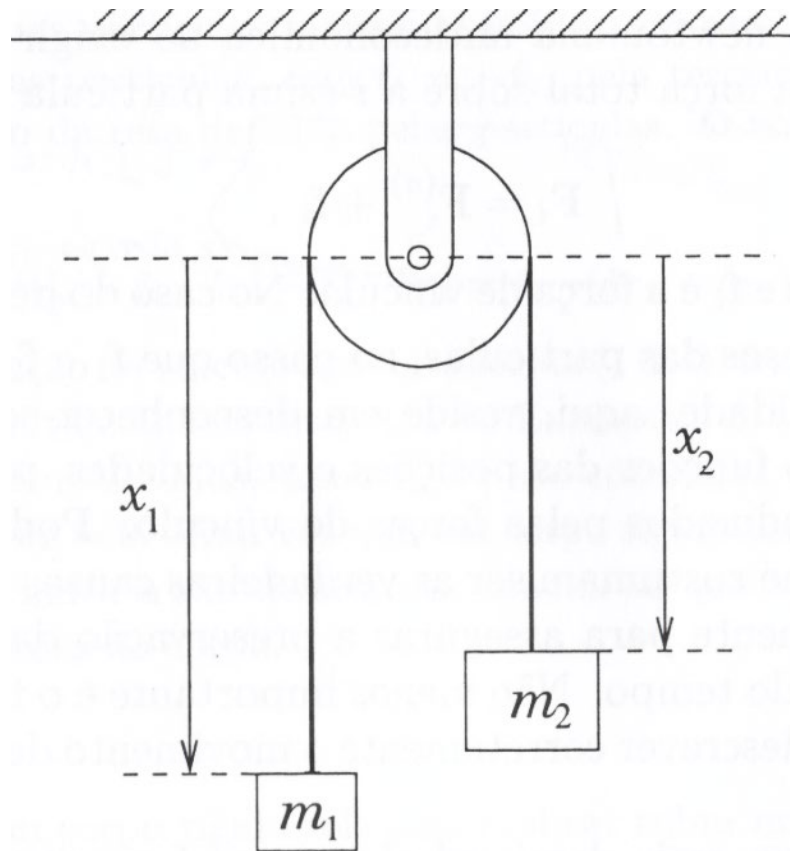
Este princípio representa uma extensão do princípio dos trabalhos virtuais a sistemas mecânicos em movimento.

Em suas aplicações concretas é preciso levar em conta que os deslocamentos virtuais $\delta \vec{r}_i$ não são independentes, pois têm que estar em harmonia com os vínculos.

Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

Exemplo 11:

Utilizando o *princípio de d'Alembert*, encontrar as equações do movimento para o sistema mecânico da máquina de Atwood.



Exemplo 11:

Solução:

A roldana é suposta sem massa e sem atrito. Com o sistema cartesiano indicado na figura, temos:

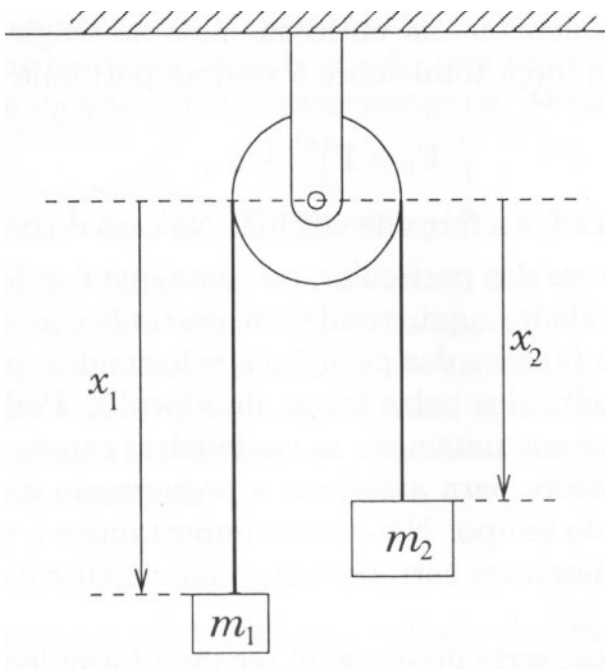
$$\vec{r}_1 = x_1 \hat{i} \text{ e } \vec{r}_2 = x_2 \hat{i}$$

e o vínculo holônomo escreve-se:

$$x_1 + x_2 = l$$

onde a constante l é determinada pelo raio da roldana e o comprimento do fio, suposto inextensível e de massa desprezível. Claramente, os deslocamentos virtuais δx_1 e δx_2 são compatíveis com o vínculo $x_1 + x_2 = l$ e estão relacionados por

$$\delta x_1 + \delta x_2 = 0 \rightarrow \delta x_1 = -\delta x_2$$



Exemplo 11:

Em outras palavras, se uma das massas sobe a outra desce a mesma distância, e vice-versa.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 &= \vec{F}_1^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_2 \\ &= m_1 g \hat{i} \cdot \delta \vec{r}_1 + m_2 g \hat{i} \cdot \delta \vec{r}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 \cdot \delta x_1 + (-m_2 \ddot{x}_1) \cdot (-\delta x_1) &= m_1 g \delta x_1 + m_2 g (-\delta x_1) \rightarrow \\ \rightarrow (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 \delta x_1 &= (m_1 - m_2) g \delta x_1 \end{aligned}$$

Exemplo 11:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1\delta x_1 = (m_1 - m_2)g\delta x_1$$

Em vista da arbitrariedade de δx_1 , resulta a equação do movimento da massa m_1 :

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = (m_1 - m_2)g$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$$

esse resultado coincide com o resultado obtido pelo tratamento newtoniano elementar. A aceleração de m_2 é simplesmente $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$.

Dinâmica Lagrangiana

➤ Forças Generalizadas

Se W for o trabalho total realizado sobre um sistema de partículas pelas Forças $\vec{F}_i^{(a)} \equiv \vec{F}_i$ atuantes (aplicadas) sobre a k -ésima partícula, então

$$dW = \sum_{i=1}^n Q_k \delta q_k$$

onde

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

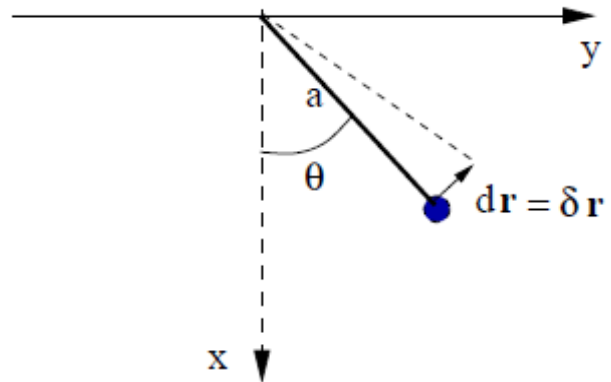
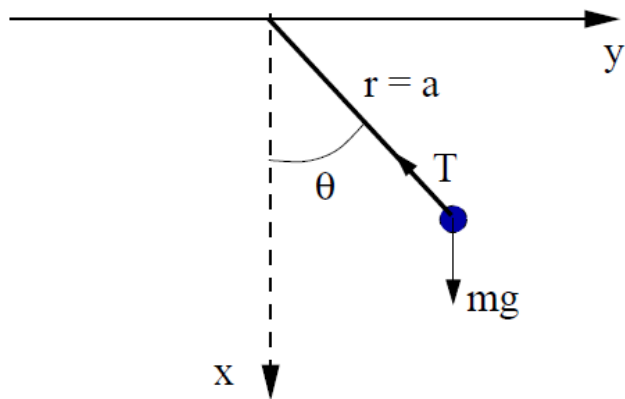
Q_k é chamada de *força generalizada* associada à coordenada generalizada q_k .

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 12:

Considere o pêndulo ilustrados nas figuras abaixo. Nesse caso $\vec{F}^{(a)} = mg\hat{x}$, $\vec{f} = -\vec{T}\hat{r}$ e a transformação de (x, y) para a coordenada generalizada θ é $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$. A força generalizada para a coordenada θ é

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad Q_\theta = mg\hat{x} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) = mg \frac{\partial x}{\partial \theta} = -mga \sin \theta$$



A condição de equilíbrio $Q_\theta = 0$ fornece $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.

Dinâmica Lagrangiana

➤ Equações de Lagrange

A força generalizada pode ser relacionada com a energia cinética pelas equações

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

Se o sistema for conservativo de modo que as forças sejam deriváveis de um potencial ou energia potencial V , podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = 0$$

Dinâmica Lagrangiana

A força generalizada pode ser relacionada com a energia cinética pelas equações

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

Se o sistema for conservativo de modo que as forças $\vec{F}_i$ sejam deriváveis de um potencial escalares $V(\vec{r}_i, \dots, \vec{r}_N, t)$ (ou energia potencial V), Neste caso,

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V = - \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \hat{k} \right)$$

Dinâmica Lagrangiana

e as forças generalizadas escrevem-se

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

onde usamos a regra da cadeia.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

Dinâmica Lagrangiana

Como $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$ e $Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$

resulta

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) = 0$$

Dado que $\partial V / \partial \dot{q}_k = 0$, esta ultima equação equivale a

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T - V) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) = 0$$

Definindo a *função de Lagrange* ou, simplesmente, *lagrangiano* L por

$$L = T - V$$

Dinâmica Lagrangiana

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T - V) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) = 0 \quad L = T - V$$

as equações de movimento do sistema podem ser escritas na forma

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0} \quad \longrightarrow \quad \text{Equações de Lagrange}$$

onde $k = 1, \dots, n$.

Se o sistema não for conservativo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 13:

Considere uma partícula de massa m sujeita a uma força conservativa $\mathbf{F}$ num espaço tridimensional.

➤ Solução

1. Newton:
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Usando coordenadas cartesianas x , y e z temos:

$$\ddot{x} = \frac{F_x}{m} \quad \ddot{y} = \frac{F_y}{m} \quad \ddot{z} = \frac{F_z}{m}$$

Exemplo 13:

2. Lagrange:
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Usando coordenadas cartesianas x , y e z temos:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) ; \quad V = V(x, y, z)$$

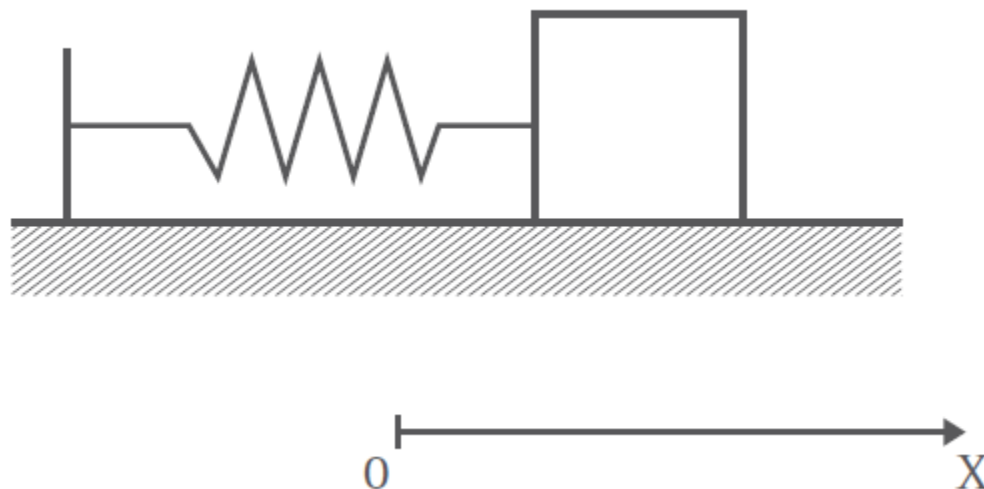
$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} ; \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} ; \frac{\partial L}{\partial x} = \partial V / \partial x = F_x \therefore m\ddot{x} = F_x \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} ; \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y} ; \frac{\partial L}{\partial y} = \partial V / \partial y = F_y \therefore m\ddot{y} = F_y \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} ; \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = m\ddot{z} ; \frac{\partial L}{\partial z} = \partial V / \partial z = F_z \therefore m\ddot{z} = F_z \end{array} \right.$$

Dinâmica Lagrangiana

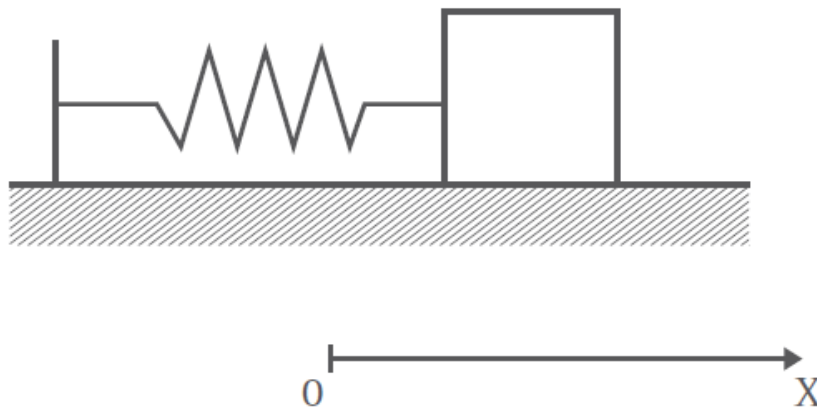
Exemplo 14:

Consideremos uma partícula de massa m em uma dimensão, sem atrito, sob a ação de uma mola de constante k , conforme representado na figura:



Exemplo 14:

➤ Solução



1. Newton: $\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{F} = -kx$

Usando a coordenada x representada na figura temos

$$-kx = m\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} = -\frac{kx}{m}$$

Exemplo 14:

2. Lagrange:
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 ; V = \frac{1}{2} k x^2$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} ; \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x} ; \frac{\partial L}{\partial x} = - k x \therefore m \ddot{x} = - k x$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 15:

O objetivo deste exemplo é ilustrar certos cuidados que devemos ter em relação às várias derivadas parciais e totais que aparecem ao longo dos cálculos no formalismo de Lagrange. Considere um sistema fictício de dois graus de liberdade cuja Lagrangeana é dada por $L = q_1^2 \dot{q}_2 + \dot{q}_1^2$.

Equações de Lagrange
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Essa Lagrangeana tem as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 2\dot{q}_1 \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = q_1^2 \quad \frac{\partial L}{\partial q_1} = 2q_1\dot{q}_2 \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0.$$

Exemplo 15:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 2\dot{q}_1 \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = q_1^2 \quad \frac{\partial L}{\partial q_1} = 2q_1\dot{q}_2 \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0.$$

Veja que q_2 não aparece em L . As derivadas totais em relação ao tempo ficam

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = 2\ddot{q}_1 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = 2q_1\dot{q}_1$$

Como as equações de Lagrange tem a forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

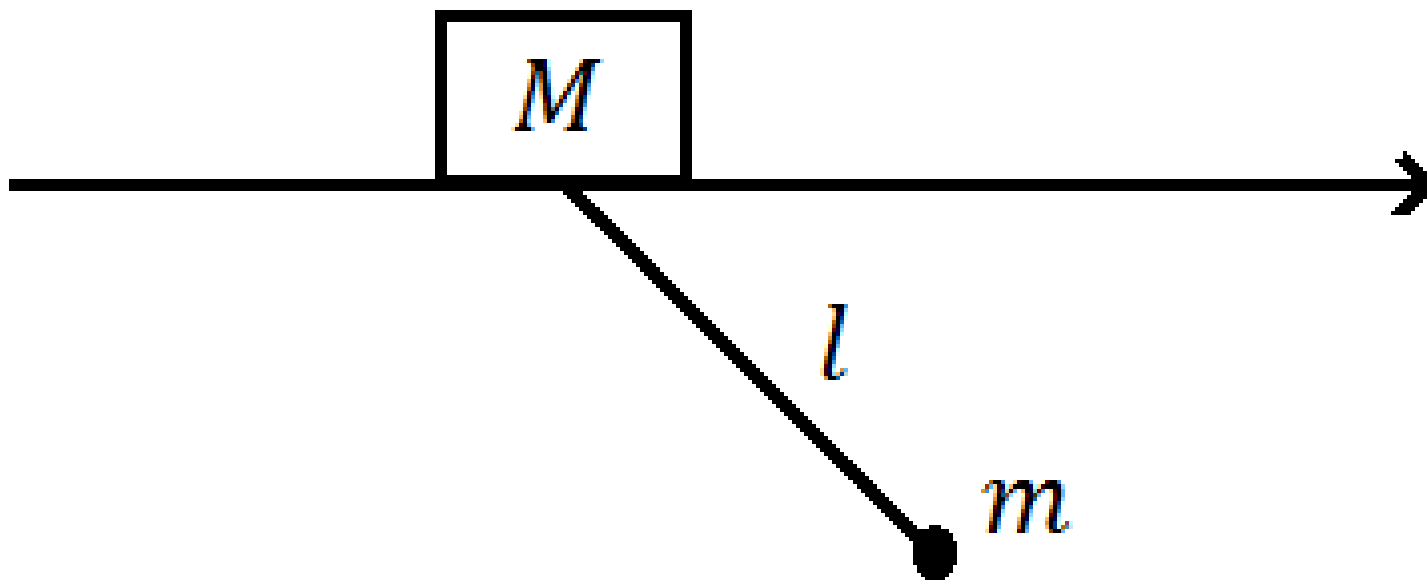
de forma que as duas equações de movimento ficam

$$\ddot{q}_1 - q_1\dot{q}_2 = 0 \quad 2q_1\dot{q}_1 - 0 = 0$$

Dinâmica Lagrangiana

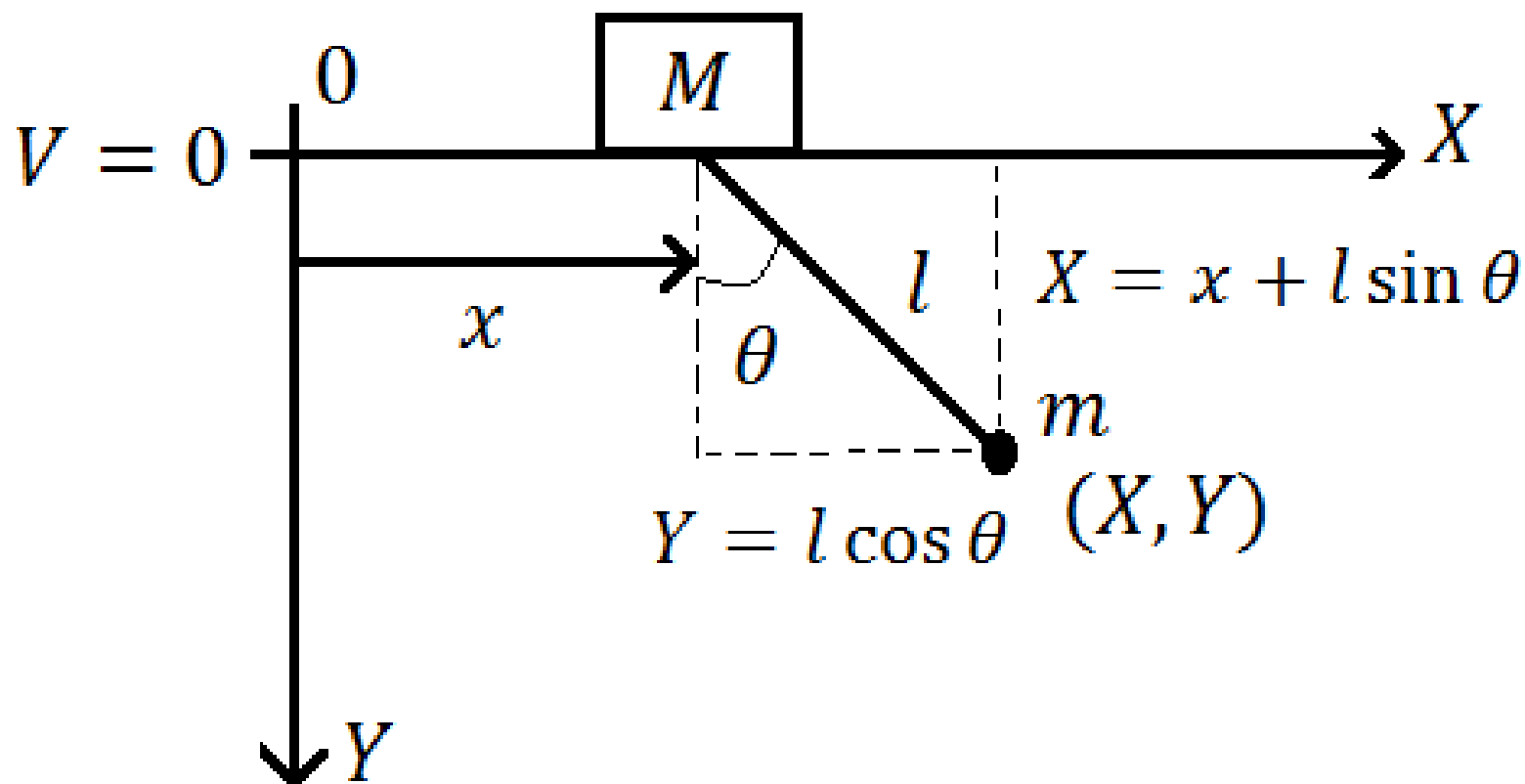
Exemplo 16:

Determine a equação de Lagrange e as equações de movimento para um pêndulo com suporte livre (a massa M pode se mover livremente sem atrito no plano horizontal, enquanto o pêndulo oscila no plano vertical).



Exemplo 16:

Refazendo o desenho e tomando o nível de referencia na origem, temos



Exemplo 16:

Podemos escrever as energias cinética e potencial

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)$$

$$V_M = 0 \quad e \quad V_m = -mgY, \quad \text{logo} \quad V = -mgY$$

Como

$$\begin{aligned} X &= x + l \sin \theta & \rightarrow & \dot{X} = \dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta \\ Y &= l \cos \theta & \rightarrow & \dot{Y} = -l \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

Logo

$$\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 = \dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta$$

Exemplo 16:

Podemos reescrever as energias cinética e potencial como

$$T = \frac{m + M}{2} \dot{x}^2 + \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta$$

$$V = -mgl \cos \theta$$

A lagrangiana fica

$$L = T - V = \frac{m + M}{2} \dot{x}^2 + \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + mgl \cos \theta$$

Exemplo 16:

OBS: A energia cinética e a energia potencial que aparecem na equação de Lagrange só pode ser escrita em relação a um referencial inercial. Isto se deve ao fato das equações de Lagrange terem sido deduzidas do princípio de d'Lambert e esse princípio envolve a aplicação da 2ª lei de Newton que é válida apenas para referenciais inerciais.

Um erro comum é escrever a energia cinética em relação ao suporte (massa M em movimento), que em geral executa um movimento acelerado.

$$v^2 = l^2 \dot{\theta}^2 \quad \rightarrow \quad T = \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2$$

Exemplo 16:

$$L = \frac{m + M}{2} \dot{x}^2 + \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + mgl \cos \theta$$

Podemos, agora, determinar as equações de movimento

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} [(m + M)\dot{x} + ml\dot{\theta} \cos \theta] - 0 = 0$$

$$(m + M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = 0$$

Exemplo 16:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

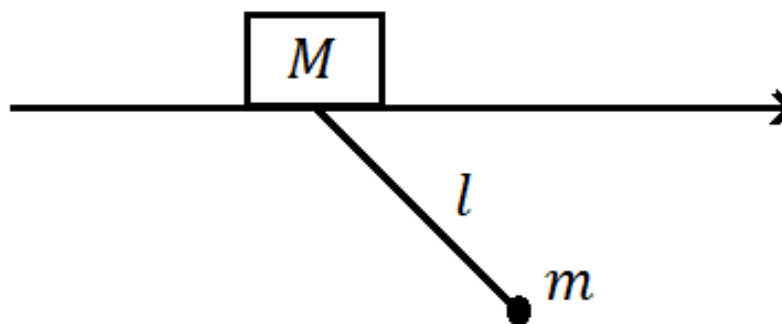
$$\frac{d}{dt} [ml^2 \dot{\theta} + ml\dot{x} \cos \theta] - [-ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta - mgl \sin \theta] = 0$$

$$ml^2 \ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta - ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + mgl \sin \theta = 0$$

$$ml^2 \ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta + mgl \sin \theta = 0$$

Exemplo 16:

Como as equações de movimento são difíceis de resolver (equações não lineares – não existe um método geral de resolução, cada caso é um caso), vamos analisar alguns casos limites (particulares) afim de verificarmos se essas equações estão corretas.



1º) Se $m = 0$

$$(m + M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = 0$$

$$(0 + M)\ddot{x} = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = 0 \quad \rightarrow \quad M \text{ se move como um corpo livre}$$

Exemplo 16:

2º) Se $M \rightarrow \infty$

$$(m + M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = 0$$

Divide-se todos os termos por M

$$\frac{(m + M)\ddot{x}}{M} + \frac{ml\ddot{\theta} \cos \theta}{M} - \frac{ml\dot{\theta}^2 \sin \theta}{M} = 0 \rightarrow \ddot{x} = 0$$

Substituindo $\ddot{x} = 0$ na segunda equação de movimento ($ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta + mgl \sin \theta = 0$) e dividindo por ml^2 , obtemos

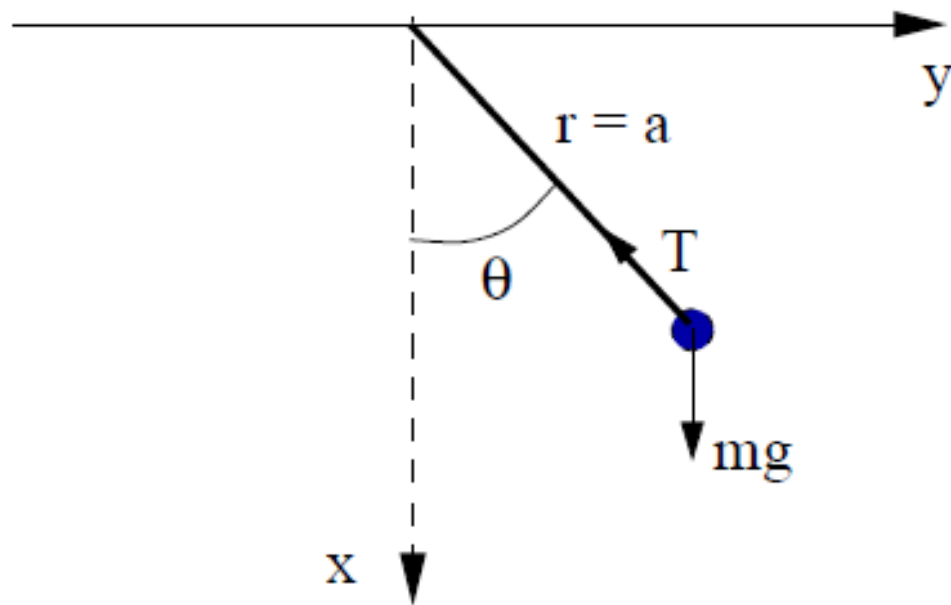
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

que corresponde a equação do pêndulo simples com ponto de suspensão fixo.

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 17

Considere o pendulo simples da figura abaixo. Em coordenadas polares o raio é fixo $r = a$ e θ é a única coordenada livre. A transformação de x, y para θ é $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$. A energia cinética é obtida calculando-se



$$\dot{x} = -a\dot{\theta} \sin \theta$$

$$\dot{y} = a\dot{\theta} \cos \theta$$

Exemplo 17

A energia cinética é obtida calculando-se

$$T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 = ma^2\dot{\theta}^2/2$$

$$V = -mgx = -mga \cos \theta$$

Como o lagrangiano é dado por $L = T - V$

Obtemos

$$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + mga \cos \theta$$

Exemplo 17

$$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + mga \cos \theta$$

Equações de Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ma^2\dot{\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mga \sin \theta$$

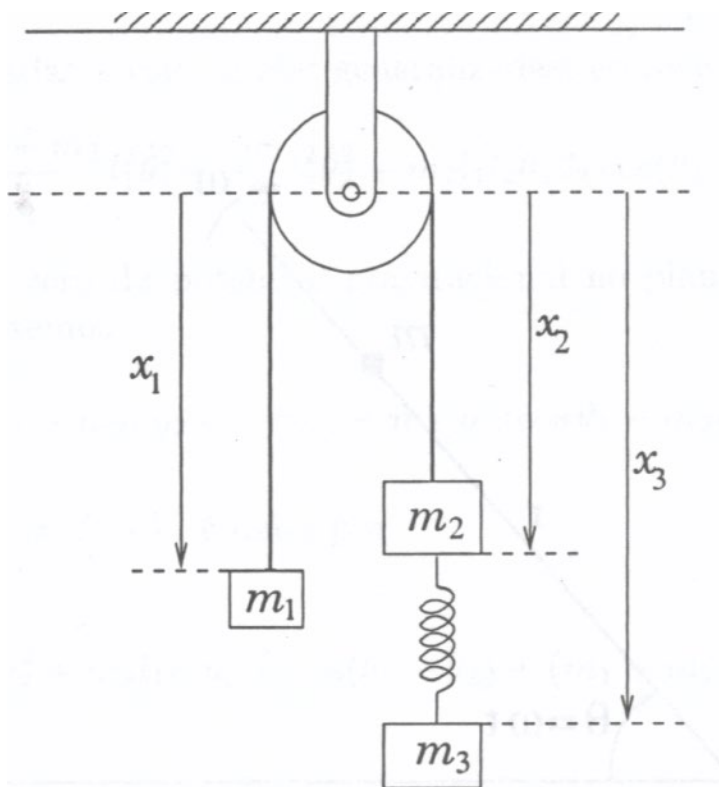
e a equação de movimento fica

$$ma^2\ddot{\theta} - mga \sin \theta = 0 \quad \rightarrow \quad a\ddot{\theta} = -g \sin \theta$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 18:

Obter a lagrangiana e as respectivas equações de Lagrange para o sistema mecânico representado, considerando desprezível as massas da roldana e do fio inextensível, e que o comprimento natural da mola é l .



Solução:

Supondo que o fio permaneça sempre esticado, o vínculo

$$x_1 + x_2 = l_0$$

l_0 é uma constante determinada pelo comprimento do fio e pelo raio da roldana, mostra que somente duas das três coordenadas x_1, x_2, x_3 podem ser tomadas como

Exemplo 18

Solução:

Supondo que o fio permaneça sempre esticado, o vínculo

$$x_1 + x_2 = l_0$$

l_0 é uma constante determinada pelo comprimento do fio e pelo raio da roldana, mostra que somente duas das três coordenadas x_1, x_2, x_3 podem ser tomadas como coordenadas generalizadas – o sistema possui dois graus de liberdade. Escolhemos x_2 e x_3 como coordenadas generalizadas.

A energia cinética do sistema é

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{m_3}{2} \dot{x}_3^2 = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{m_3}{2} \dot{x}_3^2$$

porque $\dot{x}_1 = -\dot{x}_2$

Exemplo 18

Adotando o nível zero do potencial gravitacional no plano horizontal que passa no centro da polia, temos

$$x_1 + x_2 = l_0 \Rightarrow x_1 = l_0 - x_2$$

$$V = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 - m_3 g x_3 + \frac{k}{2} (x_3 - x_2 - l)^2$$

$$V = -(m_2 - m_1) g x_2 - m_1 g l_0 - m_3 g x_3 + \frac{k}{2} (x_3 - x_2 - l)^2$$

A lagrangiana é

$$L = T - V$$

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{m_3}{2} \dot{x}_3^2 + (m_2 - m_1) g x_2 + \\ + m_1 g l_0 + m_3 g x_3 - \frac{k}{2} (x_3 - x_2 - l)^2$$

Exemplo 18

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow (m_1 + m_2) \ddot{x}_2 - (m_2 - m_1)g - k(x_3 - x_2 - l) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_3} = 0 \rightarrow m_3 \ddot{x}_3 - [m_3 g + k(x_3 - x_2 - l)] = 0$$

Se $k = 0$ não há interação entre m_2 e m_3 . Neste caso limite as equações de Lagrange preveem corretamente que m_3 cai em queda livre ($\ddot{x}_3 = g$) e que a aceleração $\ddot{x}_2 = \frac{(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)}$ da massa m_2 coincida com a obtida no tratamento da máquina de Atwood pelo princípio de d'Alembert.

Exemplo 18

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{m_3}{2} \dot{x}_3^2 + (m_2 - m_1)gx_2 + m_3gx_3 - \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - l)^2 + m_1gl_0$$

Temos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = (m_1 + m_2)\dot{x}_2 \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = (m_2 + m_1)g + k(x_3 - x_2 - l)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = m_3\dot{x}_3 \quad \frac{\partial L}{\partial x_3} = m_3g + k(x_3 - x_2 - l)$$

As equações de Lagrange são

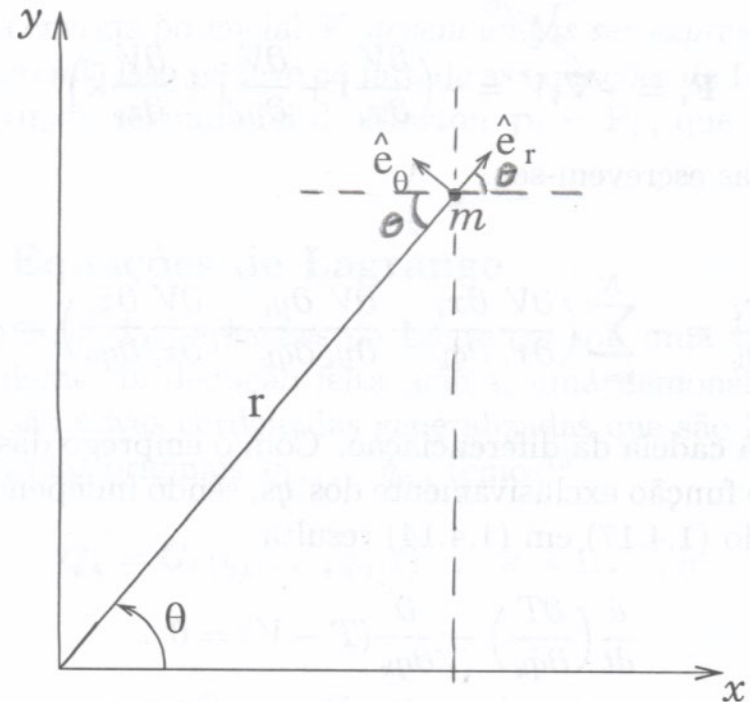
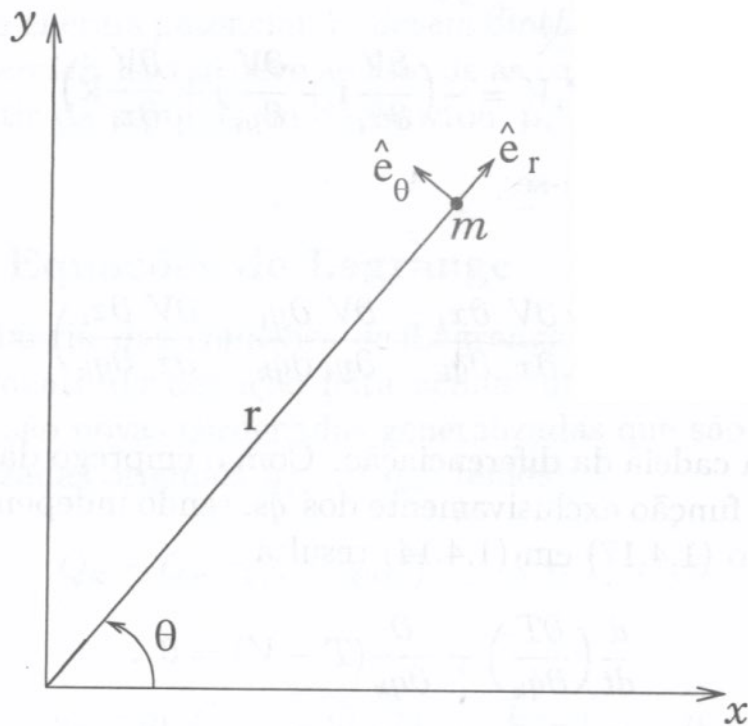
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{x}_2 - (m_2 - m_1)g - k(x_3 - x_2 - l) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_3} = 0 \rightarrow m_3\ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2 - l) = 0$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 19:

Uma partícula move-se num plano e coordenadas polares são empregadas para a descrição do movimento. O vetor posição da partícula escreve-se $\vec{r} = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j}$.



Exemplo 19

As componentes da força generalizada são

$$Q_1 \equiv Q_r = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \vec{F} \cdot (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) = \vec{F} \cdot \hat{e}_r = F_r$$

$$Q_2 \equiv Q_\theta = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \vec{F} \cdot (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) = r \vec{F} \cdot \hat{e}_\theta = r F_\theta$$

Onde $\hat{e}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$ e $\hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$ são os unitários radial e angular representados na figura.

Usando

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta,$$

a energia cinética expressa em termos de coordenadas polares é

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

Exemplo 19

Portanto, podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r \rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \rightarrow \frac{d}{dt} mr^2 \dot{\theta} = rF_\theta$$

Verifica-se portanto que rF_θ é a componente normal ao plano do movimento do torque em relação à origem, enquanto $mr^2\dot{\theta}$ é a componente do momento angular. Desenvolvendo explicitamente a derivada temporal, as equações de movimento anteriores tornam-se

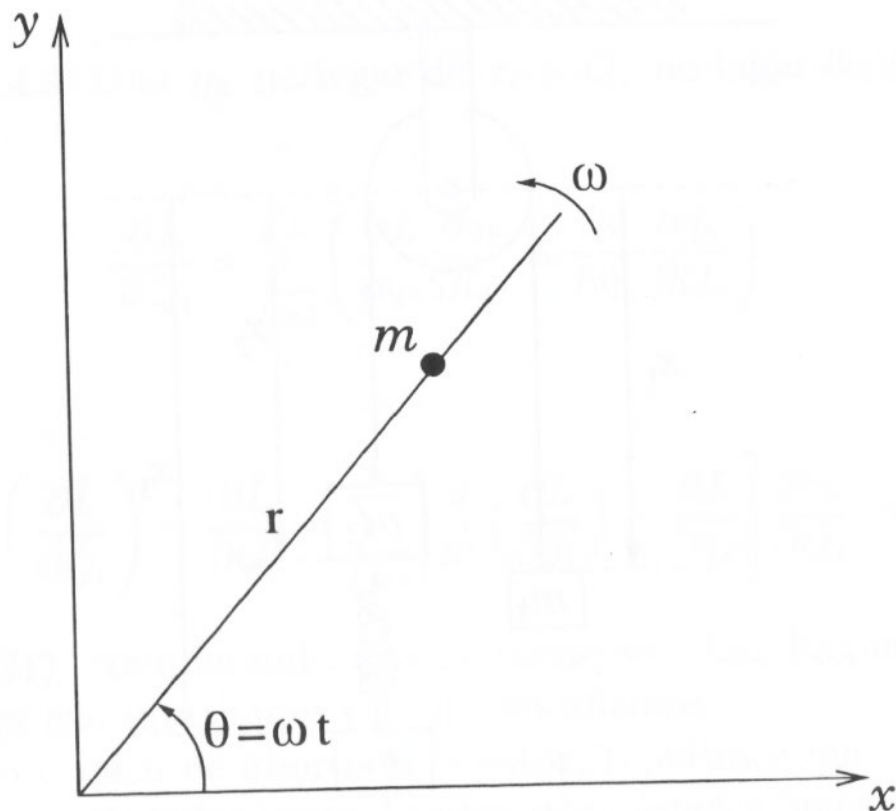
$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r \quad , \quad mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = F_\theta \quad ,$$

que são simplesmente as componentes polares da equação de movimento de Newton.

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 20:

Uma conta desliza ao longo de uma haste retilínea lisa que gira com velocidade angular constante num plano horizontal. Descreva seu movimento pelo formalismo de Lagrange.



Exemplo 20

Solução:

Seja xy o plano horizontal que contém a haste e usemos as coordenadas polares para localizar a massa m . As variáveis r, θ não podem ser tomadas como coordenadas generalizadas porque θ é forçada a obedecer à restrição $\theta - \omega t = 0$, que é um vínculo holônomo da forma $f(q_1, \dots, q_n, t) = 0$, onde ω é a velocidade angular da haste, suposta conhecida. O sistema possui somente um grau de liberdade (movimento radial) e podemos escolher $q_1 = r$ como coordenada generalizada. A energia cinética pode ser escrita na forma

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2)$$

Onde usamos $\dot{\theta} = \omega$.

Exemplo 20

Adotando o nível zero do potencial gravitacional no plano do movimento, a lagrangiana do sistema se reduz à energia cinética:

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2)$$

Dispondo da lagrangiana expressa exclusivamente em função de r e $\dot{r}$, a equação de movimento do sistema é imediatamente obtida:

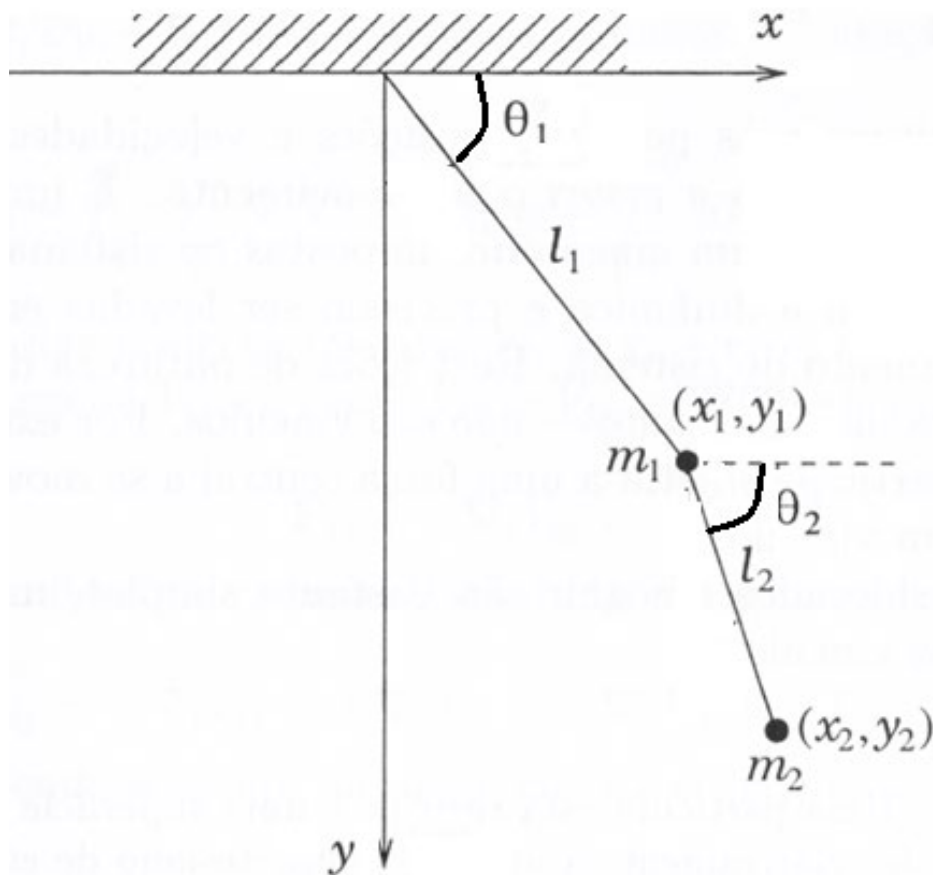
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} (m\dot{r}) - m\omega^2 r = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{r} = \omega^2 r$$

Conclui-se que a conta tende a se afastar do eixo de rotação em consequência da “força centrífuga”, que é o resultado bem conhecido.

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 21:

Aplicar o formalismo lagrangiano para obter as equações de movimento de um pêndulo duplo plano.



Exemplo 21

Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) as coordenadas cartesianas das mas m_1 e m_2 , respectivamente. Tomando-se os ângulos θ_1 e θ_2 como coordenadas generalizadas, temos

$$x_1 = l_1 \cos \theta_1 \qquad y_1 = l_1 \sin \theta_1$$

$$x_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \qquad y_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2$$

donde

$$\dot{x}_1 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \quad , \quad \dot{x}_2 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad , \quad \dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2$$

Exemplo 21

A energia cinética relativa ao referencial supostamente inercial (x, y) é

$$T = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

que, em termos das coordenadas e velocidades generalizadas, escreve-se

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Exemplo 21

Por outro lado, com o nível zero do potencial gravitacional no plano horizontal que contém o ponto de suspensão de m_1 , temos

$$V = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

Finalmente, a lagrangiana $L = T - V$ é dada por

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2}{2} + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

Exemplo 21

Usando

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1$$

a equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

toma a forma

$$\begin{aligned} & (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ & + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 \\ & = 0 \end{aligned}$$

Exemplo 21

De modo inteiramente análogo, obtemos a segunda das equações de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \dots$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \dots$$

a equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

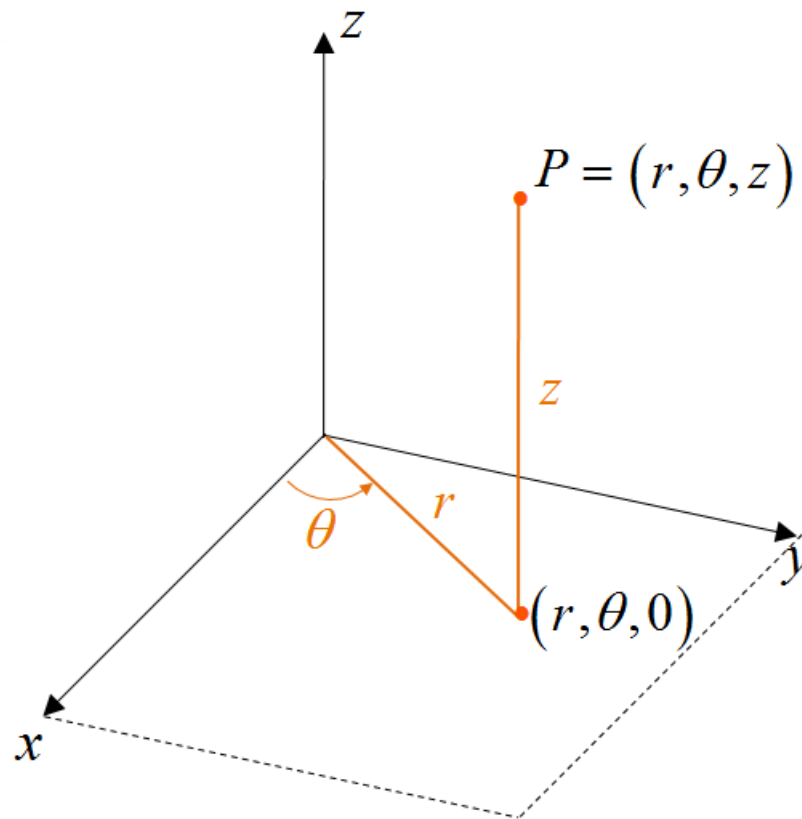
Obtém-se

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 22:

Uma partícula de massa m move-se em um campo de força conservativo. Ache (a) a função lagrangiana, (b) as equações do movimento em coordenadas cilíndrica (r, θ, z) .



Exemplo 22

Solução:

(a) A energia cinética total em coordenadas cilíndricas

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2]$$

A energia potencial $V = V(r, \theta, z)$. Então a função lagrangiana é

$$L = T - V = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2] - V(r, \theta, z)$$

(b) As equações de Lagrange são

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{r}) - \left(mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \\ \rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -\frac{\partial V}{\partial r} \end{aligned}$$

Exemplo 22

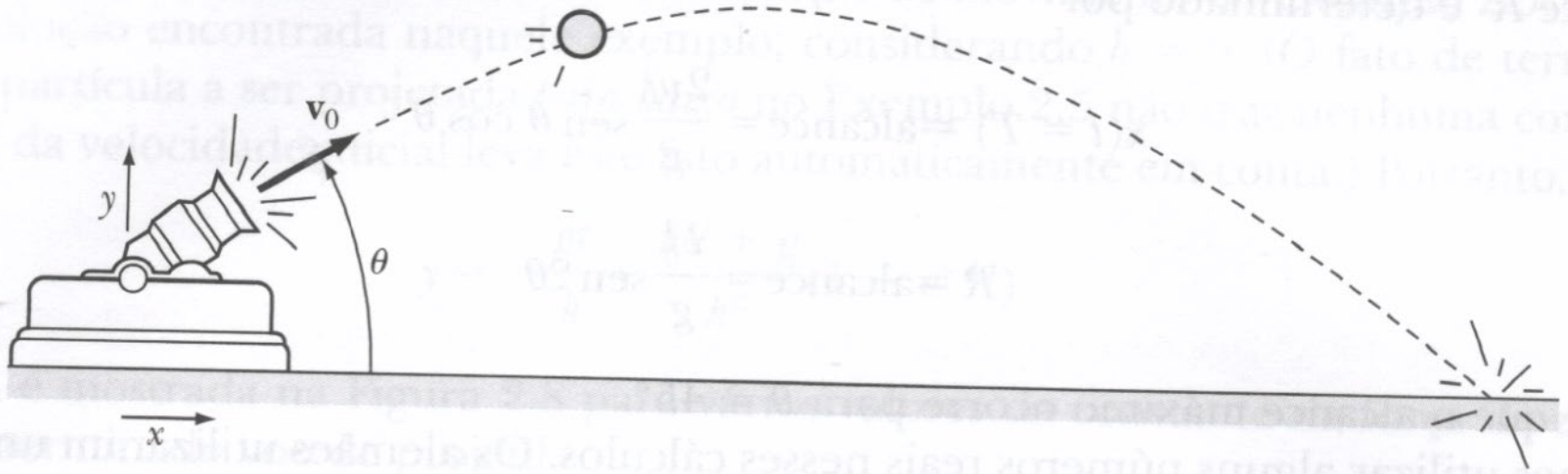
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$
$$\rightarrow m \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = - \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{z}) + \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$
$$\rightarrow m\ddot{z} = - \frac{\partial V}{\partial z}$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 23:

Considere o caso do movimento de projeteis sob a gravidade em duas dimensões. Encontre as equações de movimento nas coordenadas (a) cartesianas e (b) polares.



Exemplo 23

Solução:

(a) Em coordenadas cartesianas, podemos escrever

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \quad V = mgy$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{x}) - 0 = 0 \rightarrow \ddot{x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{y}) + mg = 0 \rightarrow \ddot{y} = -g$$

Exemplo 23

(b) Em coordenadas polares, podemos escrever

$$T = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \right] = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 \quad V = mgr \sin \theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 - mgr \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + mg \sin \theta = 0 \rightarrow \\ \rightarrow r\dot{\theta}^2 - g \sin \theta - \ddot{r} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \rightarrow \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) - mgr \cos \theta = 0 \rightarrow \\ \rightarrow -2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2\ddot{\theta} - gr \cos \theta &= 0 \end{aligned}$$

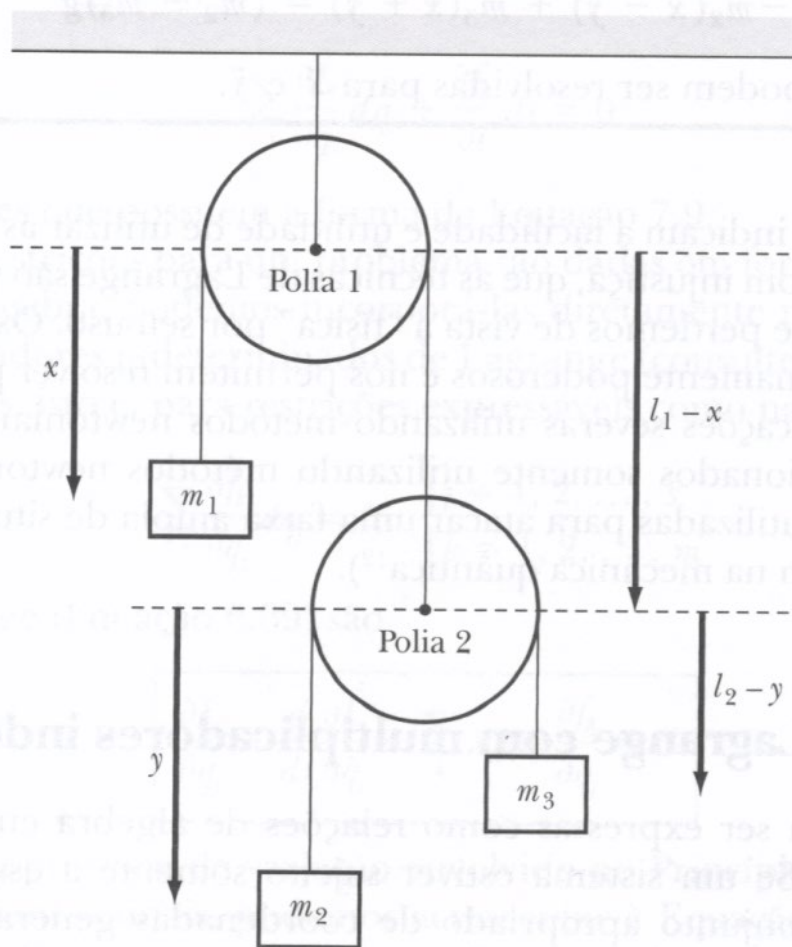
Exemplo 23

As equações de movimento em coordenadas cartesianas são mais simples que as equações em coordenadas polares. Devemos escolher as coordenadas cartesianas como as coordenadas para resolver o problema. A chave para esse reconhecimento foi que a energia potencial do sistema depende somente da coordenada y . Nas coordenadas polares, a energia potencial dependia tanto de r como de θ .

Dinâmica Lagrangiana

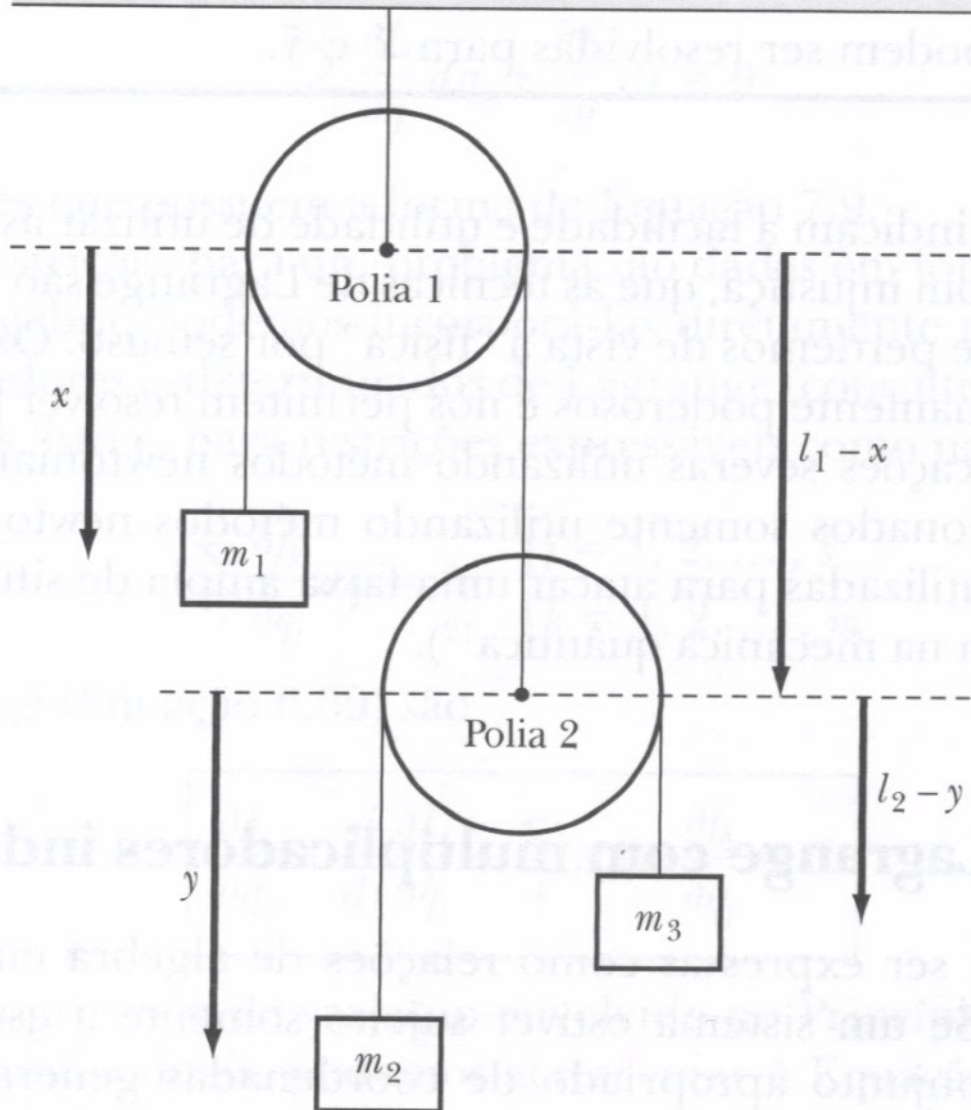
Exemplo 24:

Considere o sistema de polia dupla mostrado na figura. Utilize as coordenadas indicadas e determine as equações do movimento.



Considere as polias sem massa.

Exemplo 24:



$$y_1 = x$$

$$y_2 = l_1 - x + y$$

$$y_3 = l_1 - x + l_2 - y$$

$$l_1 = cte$$

$$l_2 = cte$$

Exemplo 24:

Solução:

Considere as polias como sem massa e estabeleça l_1 e l_2 como os comprimentos da corda livremente suspensa de cada uma das duas polias. As distâncias x e y são medidas do centro das duas polias.

$$m_1: \quad v_1 = \dot{x}$$

$$m_2: \quad v_2 = \frac{d}{dt}(l_1 - x + y) = -\dot{x} + \dot{y}$$

$$m_3: \quad v_3 = \frac{d}{dt}(l_1 - x + l_2 - y) = -\dot{x} - \dot{y}$$

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{y} - \dot{x})^2 + \frac{1}{2}m_3(-\dot{x} - \dot{y})^2$$

Exemplo 24:

Entalecemos a energia potencial $V = 0$ em $x = 0$.

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = -m_1gy_1 - m_2gy_2 - m_3gy_3$$

$$V = -m_1gx - m_2g(l_1 - x + y) - m_3g(l_1 - x + l_2 - y)$$

Simplificando, temos

$$V = -m_1gx - m_2g(l_1 - x + y) - m_3g(l_1 - x + l_2 - y)$$

Exemplo 24:

Como T e V foram determinados, as equações de movimento podem ser obtidas utilizando

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{y} - \dot{x})^2 + \frac{1}{2}m_3(-\dot{x} - \dot{y})^2$$

$$V = -m_1gx - m_2g(l_1 - x + y) - m_3g(l_1 - x + l_2 - y)$$

$$L = T - V$$

$$L = \left[\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{y} - \dot{x})^2 + \frac{1}{2}m_3(-\dot{x} - \dot{y})^2 \right] -$$
$$[-m_1gx - m_2g(l_1 - x + y) - m_3g(l_1 - x + l_2 - y)]$$

Exemplo 24:

As equações de movimento podem ser obtidas utilizando

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

que também pode ser escrita em função de x e y

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

Os resultados são:

$$m_1 \ddot{x} + m_2 (\ddot{x} - \ddot{y}) + m_3 (\ddot{x} - \ddot{y}) = (m_1 - m_2 - m_3)g$$

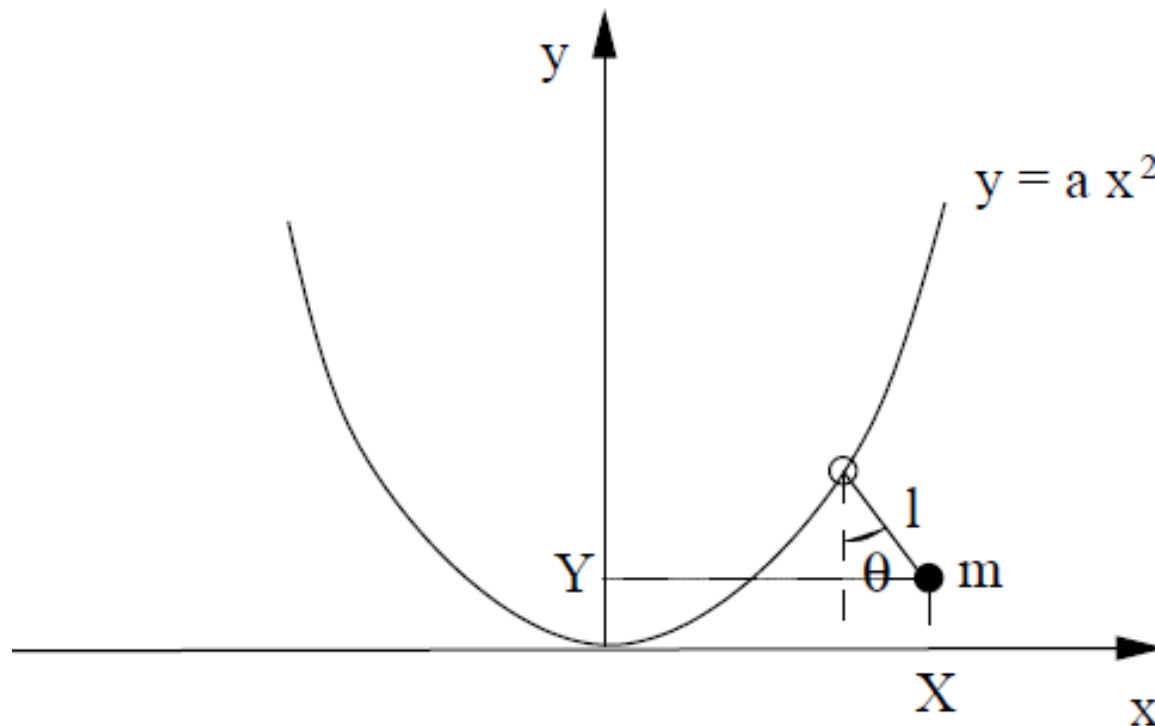
e

$$-m_2 (\ddot{x} - \ddot{y}) + m_3 (\ddot{x} + \ddot{y}) = (m_2 - m_3)g$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 25:

Pendulo com apoio em parábola. Como ilustração adicional considere um pêndulo cujo ponto de suspensão desliza sem atrito sobre uma parábola $y = ax^2$.



Exemplo 25:

As coordenadas do ponto de apoio são x e y , as da massa são X e Y e θ é o ângulo que o fio do pendulo faz com a vertical. O sistema tem dois graus de liberdade e as coordenadas generalizadas podem ser escolhidas como x e θ . As equações que conectam a posição da partícula com x e θ são:

$$\begin{aligned} X &= x + l \sin \theta & \dot{X} &= \dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta \\ Y &= ax^2 - l \cos \theta & \dot{Y} &= 2ax\dot{x} + l \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

As energias cinética e potencial são

$$T = \frac{1}{2} m \left[(\dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta)^2 + (2ax\dot{x} + l \dot{\theta} \sin \theta)^2 \right]$$

$$V = mgY = mg(ax^2 - l \cos \theta)$$

Exemplo 25:

A Lagrangeana é

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2}m \left[(\dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (2ax\dot{x} + l\dot{\theta} \sin \theta)^2 \right] - mg(ax^2 - l \cos \theta)$$

Fica como exercício escrever as equações de movimento.

Dinâmica Lagrangiana

➤ Potenciais Generalizados

Quando as forças generalizadas resultam de uma função $U(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ por meio das expressões

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k$$

então a lagrangiana fica definida por

$$L = T - U$$

onde função U é chamada **potencial generalizado** ou **potencial dependente das velocidades**.

Dinâmica Lagrangiana

A classe de forças abrangidas pela equação $Q_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k}$ é mais ampla do que o conjunto das forças conservativas, estas últimas constituindo um caso particular em que U independe das velocidades generalizadas e do tempo. Um exemplo importante é a força eletromagnética sobre uma carga em movimento.

Continuam válidas as equações de movimento de Lagrange na forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

onde $k = 1, \dots, n$.

Dinâmica Lagrangiana

OBS:

- i. A formulação lagrangiana só pode ser utilizada em sistemas conservativos (forças conservativas) ou, pelo menos, admitir um potencial generalizado que dependa das coordenadas de velocidade.*
- ii. Se houver forças dissipativas, como por exemplo, atrito viscoso num líquido, um corpo se movendo no ar à baixas velocidades, não cabem na formulação lagrangiana. Podemos usar, nestes casos, a função de dissipação de Rayleigh.*

Dinâmica Lagrangiana - Partícula Carregada num Campo Eletromagnético

Determinar a lagrangiana de uma partícula carregada em um campo eletromagnético externo.

A força experimentada por uma carga elétrica e em movimento num campo eletromagnético externo é a força de Lorentz (em unidades CGS gaussianas)

$$\vec{F} = e \left(\vec{E} + \frac{v}{c} \times \vec{B} \right)$$

As equações de Maxwell permitem escrever os campos em termos de um potencial escalar $\phi(\vec{r}, t)$ e de um potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$ da seguinte maneira:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Dinâmica Lagrangiana - Partícula Carregada num Campo Eletromagnético

Utilizando como coordenadas as próprias coordenadas cartesianas da partícula, as componentes da força generalizada coincidem as componentes cartesianas da força de Lorentz. Considere, portanto

$$\vec{F} = e \left\{ -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right\}$$

Pretendemos mostrar que $\vec{F}$ pode ser representada na forma $Q_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k}$ para alguma função U . Mas em $Q_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k}$ aparece uma derivada *total* em relação ao tempo, ao passo que em $\vec{F} = e \left\{ -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right\}$ a derivada é parcial.

Podemos introduzir uma derivada total em

$$\vec{F} = e \left\{ -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right\} \text{ notando que}$$

Dinâmica Lagrangiana - Partícula Carregada num Campo Eletromagnético

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Usando ainda

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A},$$

pois o operador *nabla* só afeta as variáveis de posição, podemos escrever

$$\vec{F} = e \left\{ -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{1}{c} \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) \right\}$$

Dinâmica Lagrangiana - Partícula Carregada num Campo Eletromagnético

Com o uso do operador $\vec{\nabla}_v = \frac{\hat{i}\partial}{\partial \dot{x}} + \frac{\hat{j}\partial}{\partial \dot{y}} + \frac{\hat{k}\partial}{\partial \dot{z}}$ e levando em conta que as coordenadas e velocidades generalizadas são tratadas como quantidades independentes, ficamos com

$$\vec{F} = e \left\{ -\vec{\nabla} \left(\phi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) \right\} - \frac{e}{c} \frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \left(e\phi - \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) + \frac{d}{dt} \left[\vec{\nabla}_v \left(e\phi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) \right]$$

pois ϕ e $\vec{A}$ não dependem da velocidade

Dinâmica Lagrangiana - Partícula Carregada num Campo Eletromagnético

Levando-se em conta que $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$, a força $\vec{F}$ assume a forma da equação $Q_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k}$ com

$$U = e\phi - \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}$$

de modo que

$$L = T - U = \frac{mv^2}{2} - e\phi + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}$$

É a lagrangeana de uma partícula carregada num campo eletromagnético externo.

Dinâmica Lagrangiana - Partícula Carregada num Campo Eletromagnético

O momento canônico é dado por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{e}{c}A_i(\vec{r}, t) \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

$$\vec{p} = m\vec{v} - \frac{e}{c}\vec{A}$$

OBS: no sistema internacional o termo $\frac{1}{c}$ desaparece e a expressão da lagrangiana fica

$$L = T - U = \frac{mv^2}{2} - e\phi + e\vec{v} \cdot \vec{A}$$

Dinâmica Lagrangiana - Partícula Livre Relativística

Vamos construir a lagrangiana de uma partícula livre relativística. Uma quantidade invariante de Lorentz envolvendo diretamente as coordenadas do espaço-tempo (de Minkowski, sem gravidade) é a métrica descrita pelo elemento de linha

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2$$

em que c é a velocidade da luz no vácuo.

Dinâmica Lagrangiana - Partícula Livre Relativística

A ação da partícula livre relativística pode ser proporcional a integral de qualquer potencia de ds . Vamos, por simplicidade, considerar a ação na forma

$$S = \alpha \int_1^2 ds$$

onde α é uma constante a ser determinada.

Vamos escrever a expressão numa forma mais conveniente

$$S = \alpha \int_1^2 \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{r}^2} = \alpha c \int_1^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

onde $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Aqui podemos identificar a lagrangiana da partícula por

$$L = \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \alpha c \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Dinâmica Lagrangiana - Partícula Livre Relativística

No limite não-relativístico, $v \ll c$, temos

$$L \approx \alpha c \left[1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right] = \alpha c - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{c} v^2$$

O primeiro termo desta equação é uma constante, que não altera as equações de movimento pois estas são obtidas por derivação de L .

O segundo termo $-\frac{1}{2} \frac{\alpha}{c} v^2$ deve ser identificado como a energia cinética não relativística $\frac{1}{2} m v^2$, onde m é a massa de repouso da partícula; então $\alpha = -mc$. Logo

$$L = \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dinâmica Lagrangiana - Partícula Livre Relativística

Daqui podemos obter quantidades importantes como o momento relativístico e a energia relativística da partícula. Vejamos primeiro o momento relativístico. Notando que $v^2 = \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j^2$, temos

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = -mc^2 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left[1 - \frac{\sum_j \dot{x}_j^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= -mc^2 \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\sum_j \dot{x}_j^2}{c^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{(-2\dot{x}_i)}{c^2} \quad \therefore \end{aligned}$$

$$\therefore p_i = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \rightarrow \quad \vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v}$$

$$i = 1, 2, 3$$